



Matemática
Multimídia

Análise de dados
e probabilidade



Guia do Professor



Vídeo

Cara ou coroa

Série Matemática na Escola

Objetivos

1. Mostrar um problema envolvendo conceitos de análise combinatória;
2. Apresentar as origens da teoria das probabilidades por meio da história de dois matemáticos.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 



UNICAMP

Cara ou coroa

Série

Matemática na Escola

Conteúdos

Probabilidade; Combinação; Problema dos pontos; História da Matemática.

Duração

Aprox. 10 minutos.

Objetivos

1. Mostrar um problema envolvendo conceitos de análise combinatória;
2. Apresentar as origens da teoria das probabilidades por meio da história de dois matemáticos.

Sinopse

Em um cenário fictício, Fermat e Pascal disputam um jogo de cara ou coroa. O o sono toma conta de Fermat quase no fim do jogo e então se coloca a pergunta: como dividir o prêmio sem que o jogo tenha chegado ao fim? Eles iniciam então uma interessante discussão sobre essa questão, que ficou conhecida posteriormente como o Problema dos Pontos.

Material relacionado

Áudios: *História da probabilidade, O que é permutação?*

Experimentos: *Táxi e combinatória; Apostas no relógio.*
Softwares: *Geometria do táxi – Combinatória, Explorando o jogo do máximo.*

Introdução

Sobre a série

A série *Matemática na Escola* aborda o conteúdo de matemática do Ensino Médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático; além disso, pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O objetivo deste vídeo é trazer um problema acessível envolvendo conteúdos de análise combinatória e que carrega uma grande importância histórica. Cabe ao professor decidir se deseja dar mais atenção aos conteúdos envolvidos na solução do problema ou nos aspectos históricos.

O vídeo traz uma situação fictícia e inusitada na qual dois grandes matemáticos contemporâneos, Pascal e Fermat, se veem isolados em uma cabana no meio de uma floresta. Sem muito o que fazer, Pascal sugere um jogo de cara ou coroa no qual vence quem marcar 10 pontos primeiro (a cada lançamento um deles marca ponto de acordo com a face obtida).

A versão atual do vídeo (até Nov/2011) tem um erro de referência ao século XVII. Logo no início o locutor fala em off de “século 1700”, que obviamente está errado e deveria ser século 17 ou décimo sétimo.

Cabe observar também que a notação para a quantidade de maneiras distintas de escolher p elementos de um conjunto de n elementos é usualmente C_p^n . Em alguns momentos desse vídeo os índices aparecem trocados. Isto não é um problema pois basta perceber que $p \leq n$, em

outras palavras, o número que se refere ao subconjunto não é maior que o número de elementos do conjunto.

No decorrer da partida, quando o placar estava 8x7 a favor de Fermat, este pega no sono e pede que a partida seja interrompida. Então, a seguinte pergunta se coloca: qual é a maneira justa de dividir o prêmio, levando em conta o placar quando o jogo foi interrompido?

Este problema foi de fato introduzido em textos matemáticos por Luca Pacioli, no final do século XV, e desde então ficou conhecido como **Problema dos pontos**. Ele foi assunto para diversos matemáticos de renome nesse período, como Tartaglia e Cardano, que também não foram capazes de propor soluções satisfatórias.

O problema não é simples - Tartaglia, que já havia demonstrado grandes habilidades matemáticas em publicações anteriores sobre o problema das equações cúbicas, escreveu que “o assunto é mais jurídico do que matemático”.

Foi apenas no século XVII que uma figura alheia ao mundo da Matemática, Chevalier de Méré, deu início ao processo que levaria à solução do problema dos pontos. Conta-se que de Méré enviou uma carta a Pascal perguntando sobre a solução deste problema. Pascal iniciou então uma troca de correspondências com Fermat. Anos depois estas cartas foram compiladas em um livro que muitos consideram a origem da Probabilidade como um campo de investigação matemática. Essa história é contada com mais detalhes no áudio *História da Probabilidade*.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Este vídeo assume que os estudantes conheçam os conteúdos básicos de análise combinatória.

Ao longo dele, será utilizado o método de contagem chamado de Combinação, porém, o entendimento do problema e da solução não é comprometido se os estudantes não tiverem ainda habilidade neste tópico específico.

O vídeo também usa conceitos básicos de probabilidade que não precisam ser conhecidos previamente pelos estudantes - ele pode ser usado justamente para introduzir esses conteúdos.

Depois da execução

Duas possíveis soluções para o problema são: divisão proporcional ao número de pontos marcados e divisão inversamente proporcional ao número de pontos restantes, mas ambas levam a resultados ruins quando aplicadas a casos extremos. Além disso, elas possuem uma inconsistência interna: por que a divisão do prêmio deveria ser proporcional (ou inversamente proporcional) ao número de pontos?

A solução proposta no vídeo rompe com esse raciocínio ao dividir o prêmio não de acordo com os pontos marcados ou faltantes, mas sim em termos das probabilidades de que cada jogador vença, considerando que as chances de ocorrer cara ou coroa sejam iguais.

É possível propor um experimento simples que simule a situação apresentada para verificar se a solução teórica obtida pelos personagens é condizente com as probabilidades reais do experimento:

- 1) Separe os alunos em duplas para que cada um desempenhe o papel de um dos personagens e termine o jogo proposto partindo sempre do placar em que ele foi interrompido no vídeo;
- 2) Cada dupla deve simular pelo menos 10 partidas e anotar quem vence cada uma delas;
- 3) Anote na lousa os resultados acumulados por cada dupla. No final desse processo, haverá cerca de 200 resultados (assumindo uma

turma com cerca de 40 alunos), o que já configura uma amostra significativa para o experimento;

- 4) Então, calcule a porcentagem de vezes que cada personagem venceu e verifique que o resultado está muito próximo daquele que foi obtido no vídeo (68,75% para Fermat e 31,25% para Pascal).

Uma variação interessante desse problema pode ser feita propondo o seguinte cenário: na final do campeonato de futebol do bairro, a decisão por pênaltis estava com placar igual a 3x2 quando faltava 1 pênalti para cada equipe. Nesse momento, começa uma chuva torrencial que impede o término das cobranças e o problema dos pontos se coloca: como deve ser dividido o prêmio em dinheiro levando em conta o placar quando o jogo foi interrompido e as chances de converter um pênalti?

Primeiro, é necessário estabelecer uma probabilidade de que um jogador converta um pênalti. Cada grupo pode estabelecer o valor que julgar mais adequado (naturalmente, essa probabilidade será maior que 50%, pois a experiência mostra que a maioria dos pênaltis são convertidos).

Isso feito, os alunos devem identificar:

- 1) Quais são as possíveis combinações de resultados, considerando que mais 4 pênaltis devem ser batidos?
- 2) Qual é a probabilidade de que cada uma dessas combinações ocorra?

Note que, nesse ponto, o novo problema tem uma diferença em relação ao problema retratado no vídeo, pois agora a chance de converter um pênalti pode ser diferente da chance de perder.

Vejamos um exemplo: o caso converter-perder tem chance de ocorrer igual a $P(\text{converter}) \times P(\text{perder})$, sendo que por definição $P(\text{perder}) = 1 - P(\text{converter})$.

E, assim, combinando as probabilidades de cada caso, é possível obter a resposta final. Note que um dos resultados leva ao empate (perder-converter) e nossa sugestão é que os alunos considerem que nesse caso o prêmio é dividido meio a meio.

Por fim, caso a atividade tenha despertado o interesse dos estudantes, sugerimos o software *Explorando o jogo do máximo*, que aborda conteúdos iniciais de Probabilidade através de um jogo de dados cujo resultado contradiz as nossas impressões iniciais.

Sugestões de leitura

Introdução à História da Matemática, 6ª Ed. (1990), Howard Eves.
Introdução a Análise Combinatória, 4ª Ed.(2008). J. P. O. Santos, M. P. Mello, I. T. C. Murari.

Ficha técnica

Conteudista *Leonardo Barichello*

Revisão *Samuel Rocha de Oliveira*

Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*

Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas

Reitor *Fernando Ferreira Costa*

Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*

Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Diretor *Caio José Colletti Negreiros*

Vice-diretor *Verónica Andrea González-López*