Matemática Multimídia

Análise de dados e probabilidade

Guia do Professor

Vídeo

Brasil x Argentina

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Aplicar o cálculo de probabilidades;
2. Apresentar a interpretação subjetivista de probabilidade;
3. Introduzir aspectos de teoria de decisão.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO
Secretaria de Educação a Distância
Ministério da Ciência e Tecnologia
Ministério da Educação
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Brasil x Argentina

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Probabilidade Subjetiva.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Aplicar o cálculo de probabilidades;
2. Apresentar a interpretação subjetivista de probabilidade;
3. Introduzir aspectos de teoria de decisão.

Sinopse
André precisa tomar uma decisão crucial em sua vida. Mas como escolher a melhor decisão? Com ajuda de seu analista, ele consegue estabelecer suas probabilidades e preferências pessoais, de modo a fazer a melhor escolha.

Material relacionado
Áudios: *Fraude 171;*
Experimentos: Dados e Aritmética; Jonkenpon;
Softwares: *Jogo do Máximo.*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa aborda a interpretação subjetivista de probabilidade e uma aplicação em teoria de decisão.

Mais precisamente, consideremos um experimento aleatório, E, e seu espaço amostral associado S, isto é, S é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento E. Chamamos evento qualquer subconjunto observável A de S.

Uma probabilidade é uma função real que a cada evento A atribui um valor entre 0 e 1, P(A), que representa a chance do evento acontecer.

Na interpretação subjetivista, o valor atribuído a estas probabilidades se baseia no conhecimento prévio da pessoa que está modelando o problema. Este conhecimento prévio pode levar em conta aspectos teóricos ou a experiência prévia com fenômenos similares ao fenômeno estudado.

O importante nesta atribuição de valores é que a função definida satisfaça os axiomas de uma função de probabilidade. A saber, que

1. a probabilidade de qualquer evento é um valor entre 0 e 1, e que a probabilidade do conjunto de todos os resultados possíveis é igual a 1;

2. a probabilidade de dois eventos mutuamente exclusivos (que não podem ocorrer ao mesmo tempo) é igual à soma de suas probabilidades;

3. a propriedade anterior é válida para qualquer coleção enumerável de eventos.

Cotidianamente, todos nós atribuímos probabilidades aos fenômenos incertos que acontecem ao nosso redor, e tomamos decisões em função desta atribuição.

Por exemplo, quando você vai atravessar a rua, você atravessa em um momento em que a probabilidade de chegar são e salvo do outro lado for suficientemente alta para você. O que é suficientemente alta depende da pessoa: uma criança pode ter opinião diferente da de seu primo adolescente ou da de sua avó.

Ao sair de casa, você decide carregar ou não guarda-chuva dependendo da probabilidade de chuva.

Outro aspecto levado em conta ao tomar uma decisão é o quanto perdemos ou ganhamos com cada decisão para cada evento possível de ocorrer. A função que representa este aspecto é chamada função de utilidade.

Por exemplo, se uma senhora acaba de sair do cabeleireiro para uma festa importantíssima para ela, com um penteado que levou 3 horas, ela provavelmente preferirá levar guarda-chuva se achar que a probabilidade de chuva for de 20%, digamos. Mas um rapaz que vai visitar a namorada provavelmente prefira não levar guarda-chuva, se achar que a probabilidade de chuva é de 20%.

Portanto, mesmo pessoas que atribuam mesma probabilidade a um evento podem tomar decisões diferentes, dependendo de sua utilidade.

Por exemplo, dois médicos poderiam ter, como usualmente ocorre, opinião diferente de qual é o melhor tratamento para o mesmo paciente, mesmo tendo a mesma informação do histórico do paciente e atribuindo o mesmo diagnóstico.

O exercício praticado no vídeo pelo analista, o de extrair a função de utilidade e a probabilidade do paciente por meio de perguntas, é chamado processo de elicitação da função de utilidade e da função de probabilidade.

Figura 1: montagem da árvore de decisão parte 1

Em geral, este não é um exercício fácil, pois muitas vezes as pessoas não conseguem verbalizar sua opinião ou preferência em termos de funções numéricas.

Figura 2: montagem da árvore de decisão parte 2

Na seção de sugestões, apresentamos uma atividade para ser realizada depois da execução do vídeo que pode ajudar a elicitar uma probabilidade, mostrando um pouco das dificuldades que podem ser encontradas neste processo.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Alguns dos experimentos da Coleção M^3 trabalham com aspectos de tomada de decisões antes de conhecer o resultado de um fenômeno aleatório.

Em particular, o *jogo Dados e Aritmética* e o *Jonkenpon* tratam com o aspecto de decidir estratégias com mais chance de sucesso ou com maior utilidade esperada.

Uma destas atividades poderia ser realizada antes de assistir ao vídeo, para que os alunos adquiram familiaridade com a noção de função de utilidade.

Uma referência bibliográfica importante nesta área, e bastante acessível ao leitor que tiver uma noção básica do cálculo de probabilidades, é o livro de Bekman e Costa Neto. A discussão que aparece neste vídeo entre o analista e André é baseada fortemente em exemplos do livro.

Depois da execução

Transformar a opinião de uma pessoa sobre um fenômeno aleatório em uma função de probabilidade bem definida pode ser um grande desafio.

Que tal propor as seguintes atividades para seus alunos?

Desafio 1

Como elicitar a probabilidade de um evento.

Com os alunos formando duplas, a atividade consiste em que um dos alunos escolha um evento de seu interesse e que o segundo aluno ajude o primeiro a extrair/definir a sua probabilidade de que este evento ocorra. Depois os papéis dos alunos podem se inverter, de modo que cada um possa fazer os dois papéis: entrevistador e entrevistado.

Chamemos de A o evento escolhido pelo aluno, que pode ser, por exemplo, que seu time ganhe o próximo jogo, que tire boa nota na próxima prova de matemática, que consiga ir a uma atividade no próximo fim de semana, que chova hoje à noite, ou qualquer outro evento de interesse do aluno (cuja probabilidade não seja, no momento, 0 ou 1).

O segundo aluno então proporá a seguinte série de perguntas.

1. Considere os dois seguintes jogos:

Jogo 1: você ganha se somente se o evento A ocorrer

Jogo 2: você extrairá ao acaso uma bolinha de uma urna contendo uma bolinha branca e uma bolinha verde; você ganha se e somente se a bolinha extraída for verde

Em qual dos dois jogos você acha que tem mais chance de ganhar?

Observe que ao comparar os dois jogos, o primeiro aluno está comparando a probabilidade do evento A com a probabilidade de extrair uma bolinha verde da urna, que tem probabilidade 1/2 de ocorrer.

Se o aluno preferir o Jogo 1, isto indica que em sua opinião, o evento A tem probabilidade maior do que 1/2. Se preferir o Jogo 2, em sua opinião, o evento A tem probabilidade menor do que 1/2 . Se ele for indiferente entre os jogos, então em sua opinião o evento A tem probabilidade 1/2 de ocorrer.

2. a. Se o aluno escolher Jogo 1, acrescente uma bolinha verde à urna e repita a pergunta

Em qual dos dois jogos você acha que tem mais chance de ganhar?

Neste caso, estamos comparando a probabilidade do evento A com 2/3 que é a probabilidade de obter uma bolinha verde no Jogo 2, já sabendo que esta probabilidade é maior do que 1/2 .

Novamente, se o aluno preferir o Jogo 1, isto indica que em sua opinião o evento A tem probabilidade maior que 2/3 de ocorrer; se preferir o Jogo 2, que o evento A tem probabilidade menor que 2/3 (e maior que 1/2); se for indiferente, que o evento A tem probabilidade igual a 2/3.

2. b. se o aluno escolher Jogo 2, acrescente uma bolinha branca à urna e repita a pergunta

Em qual dos dois jogos você acha que tem mais chance de ganhar?

A análise da resposta segue como dos casos anteriores. Se o aluno preferir o Jogo 1, então em sua opinião o evento A tem probabilidade maior que 1/3 (e menor que 1/2); se preferir, o Jogo 2, então o evento A tem probabilidade menor que 1/3; se for indiferente, a probabilidade do evento A é igual a 1/3.

Para cada vez que o aluno escolher o Jogo 1, acrescente uma bolinha verde à urna; e para cada vez que o aluno escolher o Jogo 2, acrescente uma bolinha branca à urna.

Pare o procedimento quando o primeiro aluno não souber qual jogo preferir. Neste ponto, ele não consegue estabelecer uma maior precisão de sua probabilidade, no entanto, já sabemos que ela deve ser um valor entre os valores obtidos pelas perguntas anteriores. Depois de 3 ou 4 passos, esta aproximação já é bastante razoável.

Desafio 2

Elicitar uma função de utilidade.

Peça para os alunos estabelecerem um contexto de possíveis decisões associadas ao evento A definido no Desafio 1.

Do mesmo modo que o analista do vídeo, peça para os alunos elicitarem a função de utilidade de cada decisão para cada um dos casos: A ocorre ou A não ocorre.

Algumas perguntas comparando os valores da utilidade podem ser úteis, como por exemplo: “você atribuiu utilidade -10 para a situação E, e utilidade -20 para a situação F. Isto quer dizer que você acha pior a situação F que a E. É isto mesmo?”

Depois de estabelecida a função de utilidade e a probabilidade do evento A, peça aos alunos determinarem a utilidade esperada de cada decisão e verificar se a decisão com maior utilidade esperada é mesmo a que eles mais preferem.

Se não for, isto significa que em algum momento da elicitação da probabilidade ou da função de utilidade, o aluno não foi exato de acordo com sua real opinião.

Sugestões de leitura

O. Bekman, P.L.Costa Neto (2002). Introdução à Teoria da Decisão Estatística. Editora Edgard Blücher.
W. Feller (1976). Introdução à Teoria das Probabilidades e suas Aplicações, vol I. Editora Edgard Blücher.
P. Meyer (2000). Probabilidade: Aplicações à Estatística. Editora LTC.
Site recomendado: ALEA – Acção Local de Estatística Aplicada, http://alea-estp.ine.pt

Ficha técnica

Autor: *Laura Leticia Ramos Rifo*
Revisão: *Samuel Rocha de Oliveira*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*