Geometria
e medidas

Matemática Multimídia

# Guia do Professor

# Vídeo

## Arte e Matemática

Série **Matemática na Escola**

**Objetivos**

1. Introduzir o conceito de funções polinomiais e suas raízes;
2. Apresentar a definição de fractais e seu processo de criação no computador.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.



UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

# Arte e Matemática

**Série**
Matemática na Escola

**Conteúdos**
Números e funções, funções polinomiais, fractais.

**Duração**
Aprox. 10 minutos.

**Objetivos**
1. Introduzir o conceito de funções polinomiais e suas raízes;
2. Apresentar a definição de fractais e seu processo de criação no computador.

**Sinopse**
Dois amigos conversam sobre uma exposição artística de fractais e debatem sobre funções polinomiais e suas raízes. Analisam também os métodos numéricos para encontrar as raízes de determinados polinômios que permitem a produção artística dos fractais.

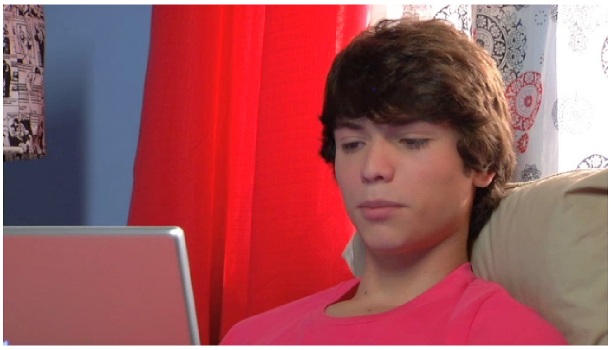
**Material relacionado**
Áudios: *Intrigas cúbicas;*
Experimentos: *Caixa de papel, O quadrado de Koch;*
Vídeos: *Código Pascal*;
Softwares: *Jogo dos polinômios.*

# Introdução

## Sobre a série

A série *Matemática na Escola* aborda o conteúdo de matemática do Ensino Médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático; além disso, pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

## Sobre o programa



Polinômio é uma expressão algébrica de uma variável formada por uma soma finita de termos, em que cada termo é o resultado do produto de uma constante por uma potência inteira não negativa da variável. Em palavras mais formais, temos:

**Definição**
Dados um número inteiro não negativo *n* e uma sequência de números $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)$, consideramos função polinomial ou polinômio a função $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots, a_n x^n$.

Em geral, a variável *x* pode ser complexa, mas no Ensino Médio tratamos apenas do caso em que tanto a variável *x* como as constantes são números reais. Para obter alguns fractais, usamos funções polinomiais complexas.

O teorema fundamental da álgebra apresenta analogias com o teorema da fatoração dos números naturais.

**Teorema da Fatoração dos números naturais**
Para todo número natural $N > 1$, existem números primos $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \cdots p_t$ tais que *N* é unicamente determinado pelo produto $N = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_t$.

O resultado desse teorema é amplamente utilizado desde o Ensino Fundamental. A demonstração dele, contudo, dificilmente é apresentada no Ensino Básico, mas provar pelo menos a existência da fatoração é razoavelmente simples desde que os alunos tenham percebido e entendido bem o enunciado do teorema.

**Exemplo**. O número $28 = 2 \times 2 \times 7$. Assim, temos os primos repetidos 2 e o primo 7. Então, encontramos os três números primos que o teorema diz que sempre existem para todos os números naturais. Da mesma forma, o produto $2 \times 2 \times 7$ só pode ser o número natural 28.

**Demonstração**
**Existência**. O principal passo para provar que a fatoração é sempre possível envolve o princípio de indução. Considere $N = 2$. Nesse caso, a decomposição é trivial, pois 2 é primo. Idem para $N =$ primo qualquer. Vamos então assumir $N > 2$ não primo. Isto é, $N$ tem pelo menos dois divisores naturais $1 < q < N$ e $1 < p < N$, tal que $N = pq > 2$. Sem perda de generalidade, podemos estabelecer a ordem $1 < p \leq q$. Agora podemos estabelecer a mesma forma de tratar N para ambos os números q e p, isto é, se forem primos, a decomposição é trivial. Se não forem primos, encontramos dois números que o compõem. E assim, por indução, chegaremos ao produto de primos.

**Unicidade**. Vamos assumir, por absurdo, que algum número natural tenha duas decomposições em primos diferentes. E, se existe um número assim, existe o menor deles, digamos *m*, isto é,

$$p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_t = m = q_1 \times q_2 \times q_3 \times \cdots \times q_s,$$

sendo que $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \cdots p_t$ e $q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \cdots q_s$. Sem perda de generalidade, podemos dizer que $t \geq s$. Por hipótese, nenhum desses números primos é zero e assim podemos dividir formalmente um pelo outro para obter

$$\frac{p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_t}{q_1 \times q_2 \times q_3 \times \cdots \times q_s} = 1$$

Agora observe que $p_1$ não pode ser igual a $q_1$, caso contrário poderíamos ter um número menor do que *m* e já assumimos que *m* é o menor dos números que poderia ser decomposto de duas formas diferentes. Assim, podemos ter $p_1 > q_1$ ou $p_1 < q_1$. Vamos tratar o caso $p_1 > q_1$, já que o outro caso vai ser similar. Então criamos o número

$$m' = m - q_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_t$$

Agora escrevemos as duas formas para *m* e obtemos

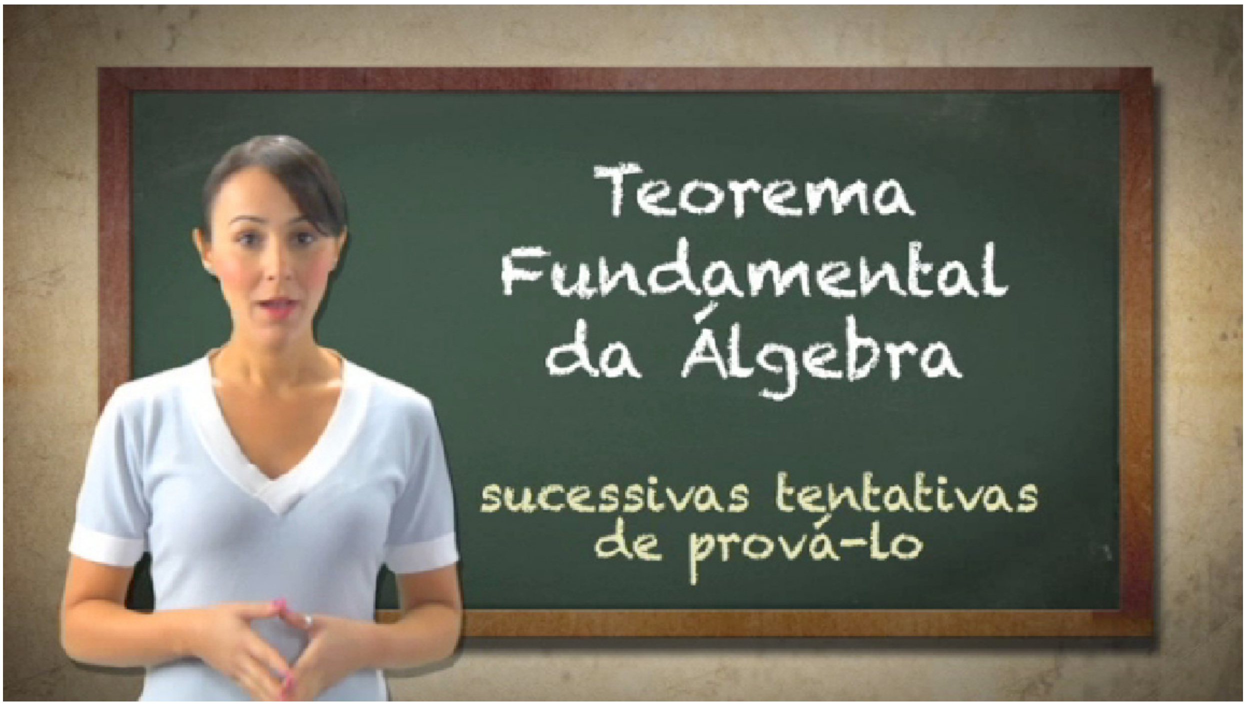
$$\begin{aligned} m' &= p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_t - q_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_t \\ &= (p_1 - q_1) \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m' &= q_1 \times q_2 \times q_3 \times \cdots \times q_s - q_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_t \\ &= q_1 \times (q_2 \times q_3 \times \cdots \times q_s - p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_t) \end{aligned}$$

Como $p_1 > q_1$, vemos da primeira equação acima que $m' > 0$ e por construção $m' < m$ (pois subtraímos algo de *m*). Mas *m* é o menor número com duas decomposições diferentes, então $m'$ deve ter uma decomposição única em números primos e as duas formas escritas acima devem ser iguais. Assim, o número primo $q_1$ tem de compor $(p_1 - q_1)$ ou $p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_t$. Mas temos $q_1 < p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \cdots p_t$ e, portanto, $q_1$ não consegue fazer parte da decomposição de $p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_t$. Assim, $(p_1 - q_1) = hq_1$ para algum inteiro *h*. Mas isto implica que $p_1 = (1 + h) \times q_1$, o que é uma contradição ao fato de $p_1$ ser primo.

Assim, concluímos, por chegar a um absurdo, que não existem duas decomposições em números primos de um número natural. ■

As demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) que tratam da decomposição de polinômios em monômios não são tão simples, como tratou o vídeo no momento do “Olha o curta”.




No entanto, graças ao TFA, sempre podemos escrever uma função polinomial em termos de suas raízes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_n)$, isto é,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots, a_n x^n = f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_n)$$

O TFA garante, então, que todo polinômio de grau *n* tem *n* raízes (que são complexas em geral, mas em alguns casos podem ser reais), mas não apresenta um algoritmo para encontrar todas elas.

Os matemáticos conhecem fórmulas exatas para encontrar as raízes de polinômios de grau máximo quatro. No Ensino Médio, aprendemos o caso das raízes do polinômio de segundo grau, pela fórmula de Bhaskara. O caso do polinômio de grau um, é trivial.

Mas com a ajuda dos computadores podemos procurar as raízes de qualquer polinômio – uma vez que o TFA garante que elas existem, é só uma questão de procurá-las.

**Fractais**

Uma classe de fractais surge nos procedimentos de encontrar raízes de polinômios.

Por exemplo, a figura abaixo foi gerada no procedimento de encontrar as raízes de um polinômio de grau 8 $f(z) = z^8 - 1$. Essas raízes estão no plano complexo. É claro que 1, -1, *i*, -*i* são raízes, pois para esses casos $f(z) = 0$. O computador começa com um ponto qualquer no plano com o seguinte algoritmo:

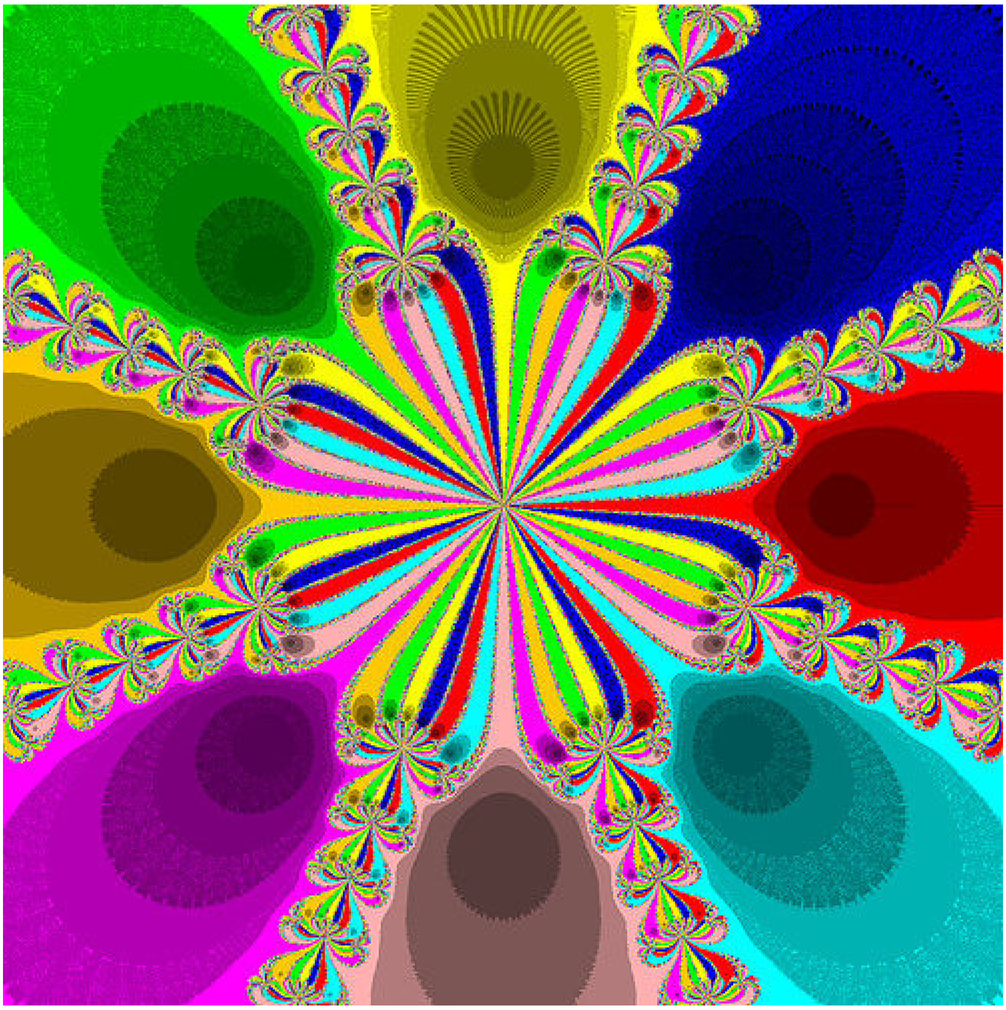
0. Começa com algum ponto *w*;
1. Calcula $f(w)$;
2. Se $f(w) \neq 0$, tenta um novo ponto dado por $w' = \frac{(7w+w^{-7})}{8}$ e volta ao passo 1 com $w = w'$;
3. Se $f(w) = 0$, nos limites computacionais, então *w* é uma raiz, e começa outro ponto à procura de mais raízes no passo 0.

A arte está em atribuir cores distintas para as raízes distintas e para a quantidade de tentativas entre os passos 1 e 2 que o método computacional precisou para encontrar a raiz.

O vídeo resume, nas palavras do estudante Caio, o conceito de fractal da seguinte forma:

*Um fractal é um objeto geométrico que, quando dividido em partes quaisquer, cada uma delas exibe semelhanças ao objeto original. E medidas geométricas, como comprimento e área de partes de um fractal, crescem ou decrescem com potências fracionárias. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes e podem ser gerados por um padrão repetido como nessa espiral infinita num processo recorrente.*

O aspecto relevante de um fractal é a sua autossimilaridade, mas não vamos aprofundar esse conceito. Para os propósitos do Ensino Médio, ter a percepção e uma intuição do que são fractais, ou pelo menos de uma classe deles, já valem a pena.

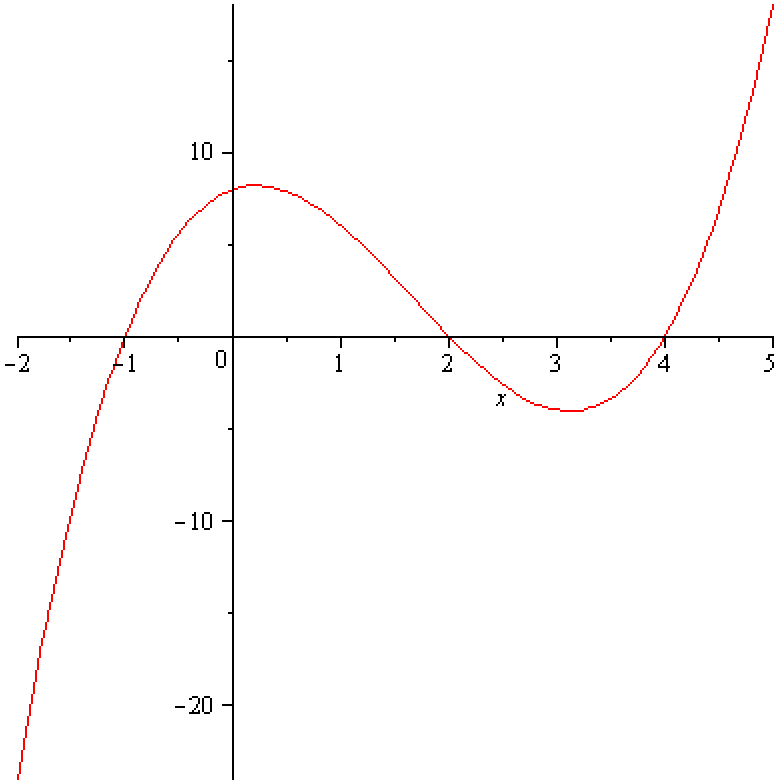


# Sugestões de atividades

## Antes da execução

Faça o esboço do gráfico da função polinomial de grau três $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ a partir de uma tabela para alguns valores de $x$ e depois mostre que $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$.

Veja o gráfico na ilustração abaixo. Use, portanto, valores de $x$ nesse intervalo de interesse de -2 a 5.




## Durante a execução

Anote os nomes das funções apresentadas no vídeo para fixar os conceitos ao final da transmissão.

## Depois da execução

Discuta com os alunos as artes associadas aos fractais e trate, como expusemos acima, dos dois teoremas: Teorema Fundamental da Aritmética e Teorema Fundamental da Álgebra (TFA).

**Exercício**

Considere uma sequência de números que é obtida da seguinte forma:

$$x_1 = 2 \text{ e } x_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(x_n + \frac{3}{x_n}\right), n > 1.$$

Use a calculadora para fazer as contas e obtenha $x_2, x_3$ etc até $x_7$. Esse é o procedimento similar ao usado no exemplo de obter os fractais acima. Neste caso, obtém-se a raiz positiva do polinômio $f(x) = x^2 - 3$, isto é, $\sqrt{3} \cong 1{,}73205$.

## Sugestões de leitura

G. Iezzi e C. Murakami (1977). **FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR.** 3ª Ed. Vol. 6 Cap. II e III Atual Editora.
R. Courant and H. Robbins (1996). **WHAT IS MATHEMATICS: AN ELEMENTARY APPROACH TO IDEIAS AND METHODS.** 2nd Ed. Oxford. P. 24.
Barbosa, R. M. (2005). **DESCOBRINDO A GEOMETRIA FRACTAL** – para a sala de aula. 2. ed. Autêntica
Fractart, Grupo. **JANELAS PARA O INFINITO: EXPOSIÇÃO SOBRE FRACTAIS,** http://www.fractarte.com.br/ página visitada em 29 de Jul/2011.

## Ficha técnica

Autor *Samuel Rocha de Oliveira*
Revisão *José Plinio de Oliveira Santos* e *Carolina Bonturi*
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

**Universidade Estadual de Campinas**
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

**Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica**
Diretor *Caio José Colletti Negreiros*
Vice-diretor *Verónica Andrea González-López*