Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

Eu acho que vi um coelhinho

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar a seqüência de Fibonacci a partir de um problema de crescimento populacional, relacionando-a com o número de ouro;
2. Exibir a transformação um problema de natureza geométrica em um problema algébrico;
3. Introduzir a seqüência dos números de Pell e o número ou razão de prata.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância | Ministério da Ciência e Tecnologia | Ministério da Educação | Governo Federal

Eu acho que vi um coelhinho

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Seqüência de Fibonacci, número de ouro, números de Pell e a razão prateada.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Apresentar as seqüências de Fibonacci e dos números de Pell, relacionando-as com o número de ouro e de prata;
2. Transformar um problema de natureza geométrica em um problema algébrico.

Sinopse
O querubim Lucas anda preocupado com a Páscoa este ano, pois não há coelhinhos suficientes para entregar os ovos de chocolate da garotada. A mando do seu patrão, ele procura então o Manoel, contando que este vá ajudá-lo a criar mais coelhinhos.

Material relacionado
Vídeos: *Naturalmente, Os caçadores de som de Fibonacci, O código Pascal;*
Áudios: *Sequência de Fibonacci*;.

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e podem ser introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula ou fechamentos de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

Este vídeo apresenta ao estudante a famosa sequência de Fibonacci, tratando de relacioná-la com o problema de criação de coelhos que lhe deu origem.

Figura 1 Joaquim vai criar coelhos

Na ficção, não há um número suficiente de coelhinhos entregadores de ovos de Páscoa para atender todas as criancinhas do planeta, o que deixa o querubim Lucas muito triste e preocupado. Seu patrão, consciente da presente situação, questiona-lhe a razão disto, ao que o querubim responde explicando-lhe que a criação de coelhos divina não tem acompanhado o crescimento da população mundial. É então que, solicitado a encontrar uma solução para este problema, o querubim

Lucas lembra-se do seu amigo Manoel que tem uma grande fazenda aonde poderia criar coelhos e também interesse em garantir um lugarzinho no céu.

Figura 2 O querubim Lucas precisa de mais coelhos da páscoa

A seqüência de números,

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

foi descoberta pelo matemático italiano Leonardo de Pisa, também conhecido por Fibonacci, e recebeu o nome de seu descobridor. Fibonacci a encontrou ao estudar o crescimento idealizado de uma população de coelhos, que tinha início com um único par de coelhos recém-nascidos, sendo um deles um macho e o outro, uma fêmea, sobre a qual assumia-se o seguinte:

- Os coelhos atingiam a maturação sexual dentro de um período de um mês, quando se acasalavam e ao final do segundo mês a fêmea tinha como cria outro casal de coelhos;

- Em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal de coelhos dava origem a um novo casal de coelhos;

- Nenhum coelho morria.

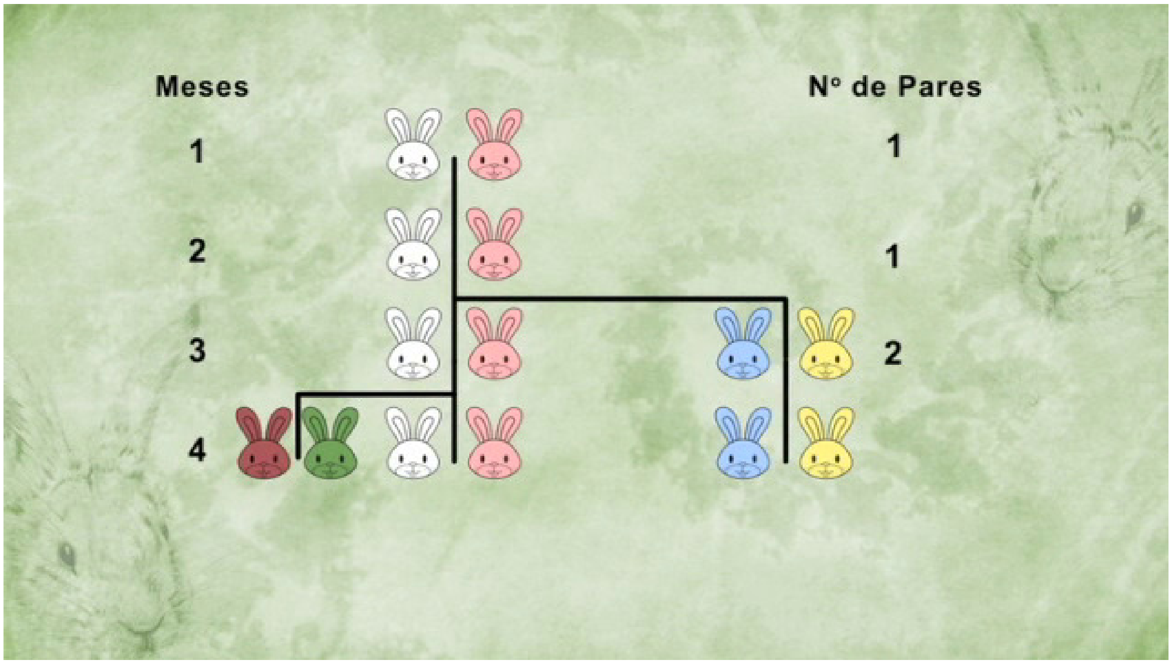

Figura 3: Esquema de reprodução dos coelhos desta população.

Analizando-se este problema, podemos perceber que ao final do *n*-ésimo mês, o número de pares de coelhos será igual ao número de casais recém-nascidos somados àqueles do mês anterior. Mas acontece que o número de casais recém-nascidos é igual ao número de pares de coelhos do ante-penúltimo mês. Portanto, se denotarmos por F_n a quantidade de casais de coelhos ao final do *n*-ésimo mês, chegamos a seguinte relação de recorrência

$$F_1 = 1, \qquad F_2 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2$$

que descreve completamente a seqüência de Fibonacci. Chamamos os termos F_n de números de Fibonacci.

Uma característica marcante da seqüência de Fibonacci é que, a partir de seus termos, podemos construir uma seqüência

$$(G_n) = (F_{n+1}/F_n),$$

que converge ao número de ouro dos gregos antigos, φ. De fato, observe que

$$G_{n+1} = F_{n+2}/F_{n+1} = (F_{n+1} + F_n)/F_{n+1} = 1 + F_n/F_{n+1} = 1 + 1/(F_{n+1}/F_n) = 1 + 1/G_n,$$

ou seja, que os números G_{n+1} e G_n estão relacionados entre si pela expressão anterior. Assim, se assumirmos que esta nova seqüência realmente convirja, digamos ao número G, então poderemos concluir que

$$G = 1 + 1/G,$$

pois os limites de G_{n+1} e G_n devem coincidir quando fizermos n tender ao infinito, isto é,

$$\lim G_{n+1} = \lim G_n = G.$$

Logo, teremos que G é uma raiz da equação quadrática

$$G^2 - G - 1 = 0$$

e, assim, G deve assumir um dos seguintes valores:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Evidentemente o primeiro caso não pode ocorrer, pois a primeira destas raízes é negativa e a seqüência (G_n) é uma seqüência de termos todos positivos. Portanto,

$$G = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Entretanto, o número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ também corresponde ao número de ouro φ, pois considerando-se um segmento de reta dividido em duas partes de medidas a e b, com $a > b$, vê-se que φ ainda é a solução do seguinte problema, tomado como a definição clássica da razão dourada:

O segmento original está para a sua maior parte, assim como a parte maior está para a menor delas.

Expresso algebricamente, isto quer dizer

$$\varphi = (a+b)/a = a/b.$$

Só que, de maneira análoga a anteriormente, podemos ver que

$$\varphi = (a+b)/a = 1 + b/a = 1 + 1/(a/b) = 1 + 1/\varphi,$$

ou seja, acabamos de mostrar que o número de ouro também é a raiz positiva do polinômio $x^2 - x - 1$. Concluímos então que $G = \varphi$.

Os números de Pell e a razão de prata

Os números de Pell são definidos pela relação de recorrência

$$P_1 = 1, \qquad P_2 = 2, \qquad P_n = 2 \times P_{n-1} + P_{n-2},\ n \geq 3,$$

o que nos mostra que eles compõem uma seqüência de números em que os dois primeiros termos valem *1* e *2* e cada um dos demais termos pode ser obtido pela soma do dobro do termo anterior a ele e o número de Pell anterior a este. Os primeiros termos desta seqüência são

$$1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, \ldots$$

A seqüência $(S_n) = (P_{n+1}/P_n)$, obtida pelo quociente de números de Pell vizinhos, também é convergente e, analogamente ao caso dos números de Fibonacci, seu valor de convergência S pode ser calculado observando-se que

$$S_n = P_{n+1}/P_n = (2 \times P_n + P_{n-1})/P_n = 2 + P_{n-1}/P_n = 2 + 1/(P_n/P_{n-1}) = 2 + 1/S_{n-1}$$

e daí fazendo-se n tender ao infinito, o que garante que

$$S = 2 + 1/S,$$

ou ainda, que o número *S* é a raiz positiva do polinômio $x^2 - 2x - 1$. Fazendo-se os cálculos encontra-se que

$$S = 1 + \sqrt{2},$$

ao que denominamos número ou *razão de prata*. Esta terminologia justifica-se em analogia a razão dourada, pois, se considerarmos um segmento de reta dividido em duas partes de medidas *a* e *b*, com $a > b$, então vê-se que *S* é a solução de um problema similar àquele que dá origem ao número de ouro:

> ***O segmento construído justapondo-se o segmento original e uma cópia de sua maior parte está para a sua maior parte assim como a parte maior esta para a menor delas.***

Algebricamente, isto quer dizer que

$$S = (2a+b)/a = a/b.$$

Embora não tão conhecida quanto o número de ouro, os gregos já estudavam aquilo que hoje conhecemos por razão de prata, uma vez que, por exemplo, este número está relacionado com os cálculos da $\sqrt{2}$ e de algumas razões trigonométricas, por exemplo:

Considere o quadrado ABCD de lado um e sua diagonal AC, que vai ter o valor incomensurável $\sqrt{2}$. Veja a Figura Fazendo uma semireta definida pelos pontos B e C, e uma circunferência centrada em C que passa pelo ponto A, obtemos o ponto E, que é a intersecção da circunferência e a semireta. O segmento de reta BE vai ter o comprimento de prata, isto é $S = 1 + \sqrt{2}$, por construção. Assim podemos analisar o triângulo retângulo ABE e as suas razões trigonométricas.

$$\text{sen}(\alpha) = EB/EA,\ \cos(\alpha) = BA/EA,\ \text{tg}(\alpha) = EB/AB,\ \text{cotg}(\alpha) = AB/EB.$$

O comprimento do segmento AE é dado pelo teorema de Pitágoras, $\sqrt{1+S^2} = \sqrt{2(S+1)}$. Aqui usamos o fato que a razão de prata é tal que $S^2 = 2S+1 \Rightarrow 1+S^2 = 2(S+1)$.

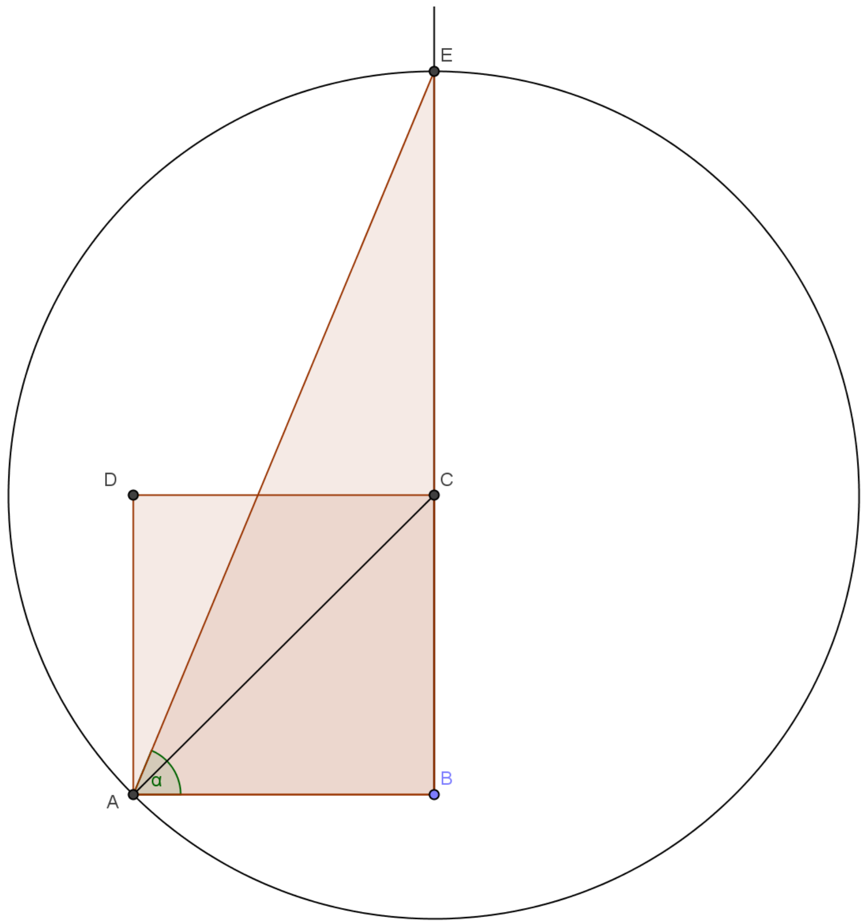

Figura 4 Construção geométrica, com régua e compasso, do segmento de prata BE

Pode-se provar que α = *π/8.* Assim, os gregos obtiveram seguintes valores para as razões trigonométricas em termos da razão de prata:

sen *π/8* = $\sqrt{\frac{S}{2(S+1)}}$; cos *π/8* = $\frac{S}{\sqrt{2(S+1)}}$; tg *π/8* = $\frac{1}{S}$; cotg *π/8* = *S*.

Pell e coelhos

Apesar de historicamente os números de Pell não terem sido usados para se estudar o crescimento de uma população de coelhos, podemos fazê-lo, se assim desejarmos. Para tanto, basta considerarmos uma população idealizada de coelhos que atenda as seguintes condições:

- Esta população tem início com um único casal de coelhos recém-nascidos, que morrem logo após terem dado cria a outro casal de coelhos, o que ocorre ao final de um ano;

- A partir do segundo ano, nenhum coelho morre e cada casal de coelhos dá cria a outro casal de coelhos, se ele tiver apenas um ano de idade, ou dá cria a dois casais de coelhos, quando eles forem mais velhos.

Podemos ilustrar a situação acima descrita com a seguinte tabela:

Período	**Casais de coelhos com 2 ou mais anos**	**Casais de coelhos com 1 ano**	**Casais de coelhos recém-nascidos**	**Total de casais de coelhos**
0	1			
1	0	0	1	1
2	0	1	1	2
3	1	1	2+1	5
4	1+1	3	2+2+3	12
5	2+3	7	4+6+7	29
6	5+7	17	10+14+17	70

Tabela 1. Número de casais de coelhos nos seis primeiros anos desta população.

Observando-se sua última coluna, vemos assim que os totais de casais de coelhos ao final de cada ano dão origem a seqüência de números de Pell.

Sugestões de atividades

Antes da execução

Professor, antes de exibir este vídeo aos seus alunos discuta com eles a questão do crescimento da população mundial e suas implicações futuras, discorrendo sobre a necessidade de uma maior produção de alimentos e o preço destes, a ampliação da área necessária para o cultivo dos mesmos e os impactos ambientais daí decorrentes. Embora isto não seja precisamente matemática, o aspecto social de tal problema não deve ser deixado de lado.

Depois da execução

Professor, agora que seus alunos já conhecem a seqüência de Fibonacci, seria interessante também exibir para eles algumas de suas propriedades. Se quiser, comece demonstrando que a seqüência (G_n), definida anteriormente neste manual, realmente converge para o número de ouro, $(1+\sqrt{5})/2$, segundo a argumentação que fornecemos acima. Esta é uma ótima maneira para argumentar como as diversas áreas da matemática podem se relacionar em um todo coerente e juntas resolver um problema aparentemente de outra natureza.

De fato, partimos de um problema de geografia/biologia, modelando-o a partir de uma seqüência de números bastante característica, para a qual determinamos uma relação de recorrência, que posteriormente nos permitiu algebricamente encontrar uma resposta de natureza geométrica. Se seus alunos compreenderem completamente o que foi feito aqui, certamente eles gostariam mais de matemática. Obviamente falta-lhes experiência para essa compreensão, o que talvez pudesse ser compensado, ao menos em parte, deixando-os resolver outro problema bastante similar a este. Você, professor, pode fazer isto considerando uma nova população de coelhos que cresce como no tópico "Pell e os coelhos" e daí pedir a seus alunos que identifiquem os números de casais de coelhos nos primeiros anos desta população, para que depois eles descrevam uma relação de recorrência para estas quantidades e, por fim, mostrem a convergência da seqüência (S_n) para a razão de prata. Para encerrar a atividade, peça aos seus alunos que escrevam em casa, diversas ternas de números a partir da relação

$$(2 \times P_n P_{n+1},\ P^2_{n+1} - P^2_n,\ P^2_{n+1} + P^2_n),$$

e tentem identificar que propriedades os números destas ternas guardam entre si. Eles não devem ter dificuldade em enxergar que, se

$$(2 \times P_n P_{n+1},\ P^2_{n+1} - P^2_n,\ P^2_{n+1} + P^2_n) = (c, b, a),$$

então $a^2 = b^2 + c^2$, isto é, tratam-se de ternas pitagóricas.

Sugestões de leitura

A. de Azevedo (2001). Seqüência de Fibonacci, Revista do Professor de Matemática, n° 45, 2001, p. 44-47.
J. P. de Oliveira (2000). Introdução à Teoria dos Números, 2a. edição, IMPA/SBM.
E. Q. F. Rezende e M. L. B. de Queiroz (2008). Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas, Editora da Unicamp.

Ficha técnica

Autor *Douglas Mendes*
Revisão *José Plinio de Oliveira Santos*
Coordenação de Mídias Audiovisuais *Prof. Dr. Eduardo Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*