Matemática Multimídia

Geometria e medidas

Guia do Professor

Vídeo

Abelhas Matemáticas

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Mostrar que os alvéolos hexagonais das abelhas têm a forma ótima em relação à capacidade para armazenar mel;
2. Interpretar uma situação contextualizada utilizando conceitos matemáticos.

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância | Ministério da Ciência e Tecnologia | Ministério da Educação | Governo Federal

Abelhas Matemáticas

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Prismas e figuras geométricas.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Mostrar que os alvéolos hexagonais das abelhas têm a forma ótima em relação à capacidade para armazenar mel;
2. Interpretar uma situação contextualizada utilizando conceitos matemáticos.

Sinopse
O adolescente Caio assiste ao programa *Animais Curiosos* apresentado por James Calafrio. James fala sobre as abelhas, sua organização social e, em especial, sobre a forma hexagonal dos alvéolos. Utilizando conceitos matemáticos, ele mostra que a forma dos alvéolos construídos pelas abelhas é a que apresenta maior capacidade usando uma determinada quantidade de cera.

Material relacionado
Áudios: ;
Experimentos: ;
Softwares: .

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser desenvolvido em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

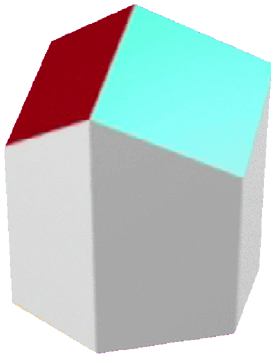
O adolescente Caio assiste ao programa Animais Curiosos apresentado por James Calafrio. James fala sobre as abelhas, sua organização social e, em especial, sobre a forma hexagonal dos alvéolos. Utilizando conceitos matemáticos, ele mostra que a forma dos alvéolos construídos pelas abelhas é a que apresenta maior capacidade usando uma determinada quantidade de cera.

James começa falando sobre a vida social das abelhas e a função de cada elemento na colmeia. Devido à curiosidade de Caio em saber qual é a relação entre as abelhas e a matemática, James explica como é a forma geométrica dos alvéolos e mostra como a matemática ajuda a ver que essa forma é a que otimiza a capacidade para armazenar mel.

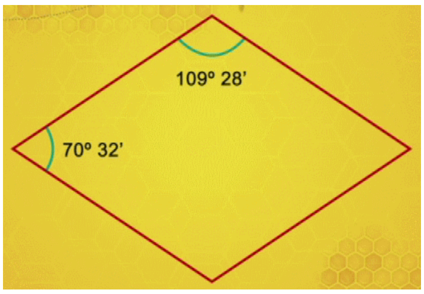
Também são comentados alguns fatos históricos sobre o trabalho de alguns estudiosos sobre o assunto.

Problemas desse tipo, onde se procura o máximo de uma quantidade com um mínimo de outra são chamados de mini-max. No caso dos alvéolos das abelhas o problema consiste em determinar a forma do alvéolo de maior capacidade de armazenamento para a menor quantidade de cera possível.

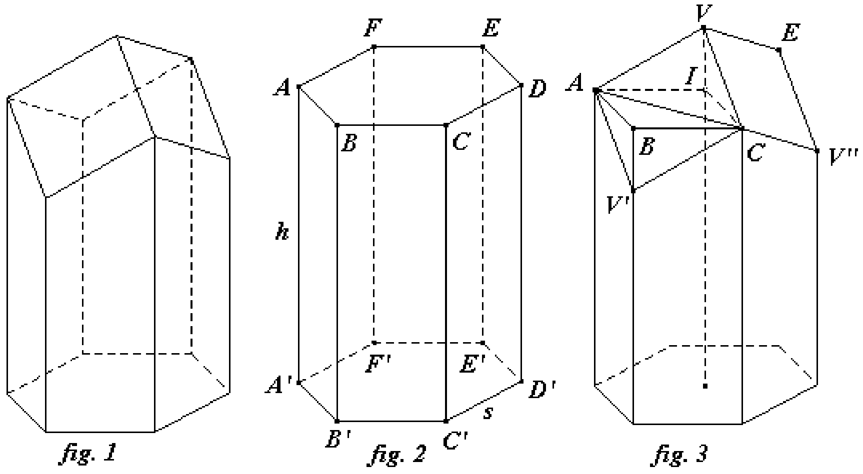
Descrição do alvéolo do favo das abelhas



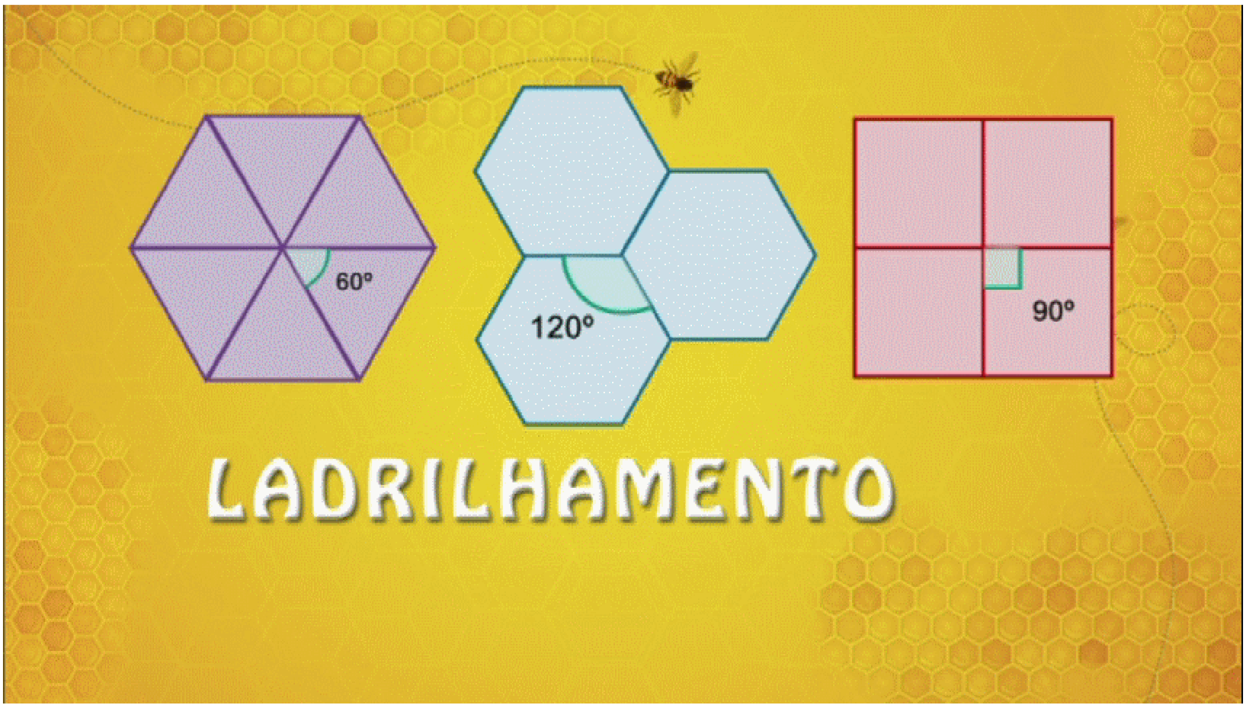
O alvéolo do favo das abelhas é um prisma hexagonal regular com uma extremidade aberta e um ápice triédrico (fig.1). Podemos construir a superfície começando com uma base hexagonal regular $A'B'C'D'E'F'$ com lado s. Acima da base levantamos um prisma reto com uma altura h e com topo $ABCDEF$ (fig.2). Os cantos B, D e F são cortados por planos passando pelas retas AC, CE, EA, que se encontram em um ponto V no eixo do prisma, e intersectam BB', DD', FF', em V', V'', V''' (fig.3). As três peças cortadas são os tetraedros $ABCV'$, $CDEV''$, $EFAV'''$. Colocamos essas peças no topo do sólido restante tal que V', V'' e V''' coincidam com V. Para isto, as retas AC, CE, EA agem como articulações. As faces $AV'CV$, $CV''EV$, $EV'''AV$ são losangos, isto é, quadriláteros com lados iguais. O novo corpo é o alvéolo da abelha e tem o mesmo volume que o prisma original. A base hexagonal $A'B'C'D'E'F'$ é a extremidade aberta.



As abelhas constroem os alvéolos com todos os losangos do fechamento tendo ângulos com medidas 70°32' e 109°28'. E, como veremos, esta é a forma mais econômica.



Para mostrar, usando conceitos matemáticos, que a forma dos alvéolos utilizada pelas abelhas é a mais econômica, podemos primeiramente mostrar que as únicas possibilidades para preencher o plano, ou seja, ladrilhar o plano, com polígonos regulares congruentes são por triângulos equiláteros, ou quadrados, ou hexágonos regulares. Sabendo disso, comparamos os volumes dos prismas de base triangular equilátera, quadrada e hexagonal regular, tendo áreas laterais e alturas iguais. Finalmente, determinamos as medidas dos ângulos dos losangos da cobertura do alvéolo que minimizam a área total lateral.



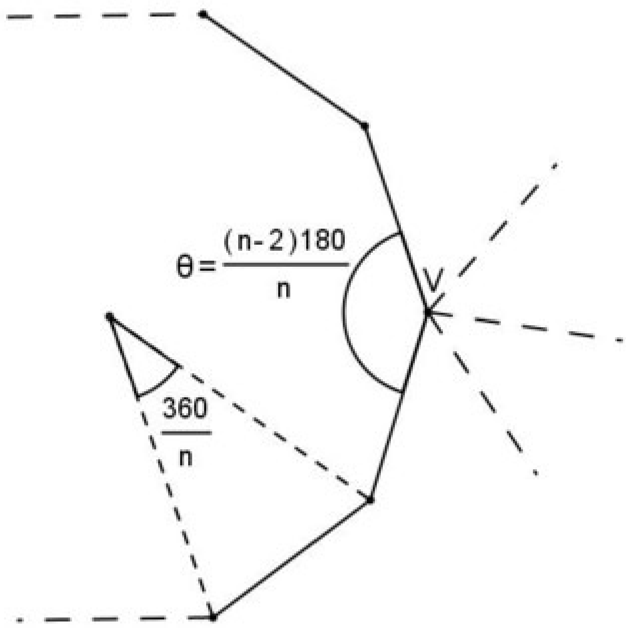
Ladrilhamento por polígonos regulares

Um ladrilhamento do plano é um conjunto de regiões poligonais que cobrem o plano sem deixar espaços vazios e sem se sobreporem. As regiões poligonais são chamadas ladrilhos.

Vamos analisar as possibilidades para ladrilhamento do plano onde todos os ladrilhos são polígonos regulares e congruentes com n lados.

A medida de cada ângulo interno de um polígono de n lados é

$$\theta = 180 - \frac{360}{n} = \frac{(n-2)180}{n}.$$



Supondo que em cada vértice, por exemplo V, se encontram k polígonos regulares congruentes com n lados cada um, justapostos, sem que haja superposição e sem que ocorram espaços vazios, temos $k.\frac{(n-2)180}{n} = 360$, ou seja, $k = \frac{2n}{n-2}$ (*).

Como $k \geq 3$, pois não tem sentido em um vértice se encontrarem 1 ou 2 polígonos regulares, temos $\frac{2n}{n-2} \geq 3$, ou ainda, $n \leq 6$.

Sendo k um número inteiro positivo, utilizando (*) temos as seguintes possibilidades: $n = 3$ e $k = 6$, ou $n = 4$ e $k = 4$, ou $n = 6$ e $k = 3$. Logo, em cada vértice do polígono regular podem se encontrar 6 triângulos equiláteros e congruentes, ou 4 quadrados congruentes ou 3 hexágonos regulares e congruentes. Assim, as únicas possibilidades para ladrilhar o plano por polígonos regulares e congruentes são: utilizando ladrilhos triangulares equiláteros, ou quadrados congruentes, ou hexagonais regulares congruentes.

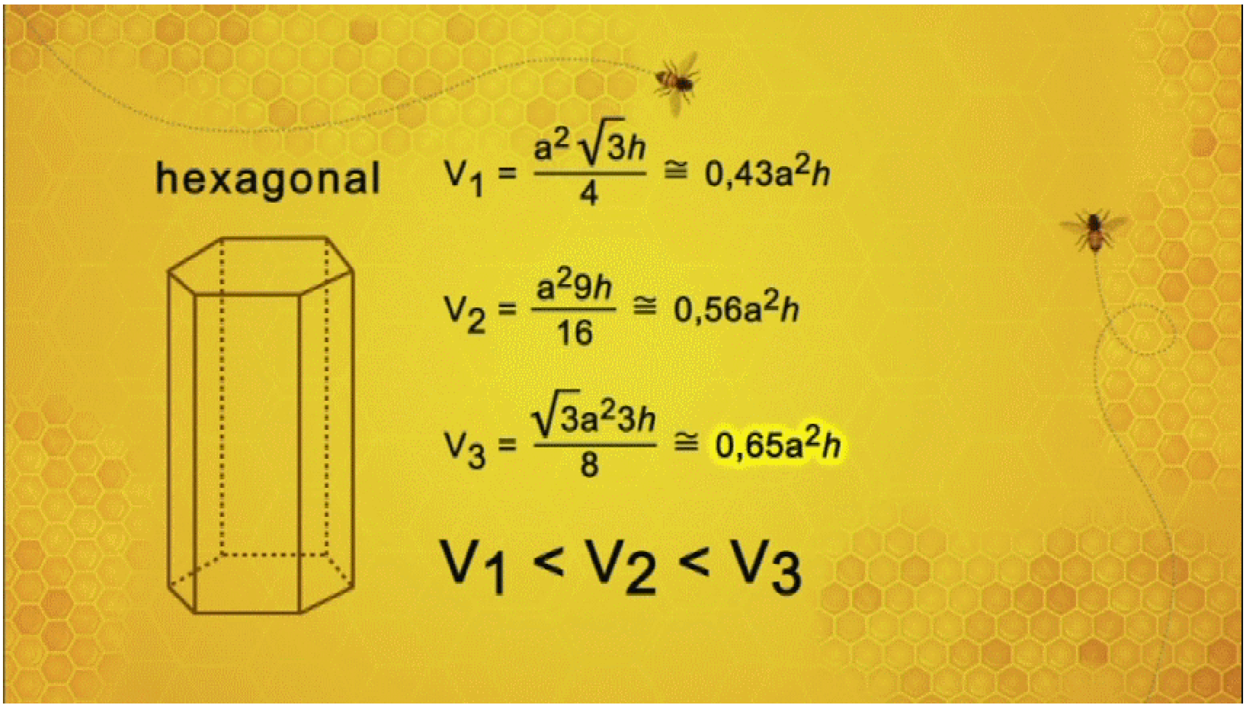
Prisma de volume máximo

As bases de prismas de base triangular, quadrada e hexagonal com mesma área lateral e mesma altura têm o mesmo perímetro. Sendo a, b, c as arestas das bases destes prismas, temos $3a = 4b = 6c$, e, assim, $b = \frac{3a}{4}$ e $c = \frac{a}{2}$.

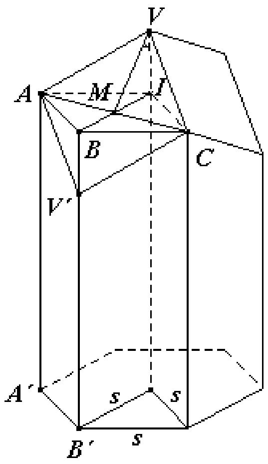
Como o volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela altura, considerando h a altura dos prismas, os volumes V_1, V_2 e V_3, respectivamente dos prismas de base triangular, quadrada e hexagonal são dados por

$$V_1 = \frac{a^2\sqrt{3}h}{4} \approx 0{,}43a^2h,\ V_2 = \frac{a^2 9h}{16} \approx 0{,}56a^2h \text{ e } V_3 = \frac{\sqrt{3}a^2 3h}{8} \approx 0{,}65a^2h.$$

Portanto, $V_1 < V_2 < V_3$.



Cálculo da área lateral total do alvéolo



As abelhas constroem os alvéolos utilizando cera. Quando o volume é dado, é econômico se poupar cera e, portanto, escolher o ângulo de inclinação, $\theta = I\hat{V}V'$, onde I é o centro de $ABCDEF$, de tal forma que a superfície do alvéolo seja minimizada.

Sendo M a interseção de CA e VV', $IM = \frac{s}{2}$. O segmento CM é a altura do triângulo equilátero BCI, e $CM = \frac{s}{2}\sqrt{3}$. Como o triângulo IMV é retângulo temos a relação $sen\theta = \frac{IM}{VM} = \frac{s/2}{VM}$ e, assim, $VM = \frac{s}{2sen\theta}$.

A área do losango $AV'CV$ é dada pela metade do produto de suas diagonais e a superfície do alvéolo contém três destas áreas.

$$\acute{a}rea\ AV'CV = \frac{(AC).(VV')}{2} = \frac{2.(CM).2.(VM)}{2} = \frac{s^2\sqrt{3}}{2sen\theta}.$$

As seis faces laterais do alvéolo, por exemplo, $AA'B'V'$, são trapezóides congruentes. Como $BV' = VI$, obtemos do triângulo VIM que

$$cotg\theta = \frac{VI}{IM} = \frac{BV'}{s/2}.$$

Isto implica que $BV' = \frac{s}{2}cotg\theta$. Assim,

$$\acute{a}rea\ AA'B'V' = \frac{s}{2}(A'A + B'V') = \frac{s}{2}(h + h - BV') = hs - \frac{s^2}{4}cotg\theta.$$

Consequentemente, a medida da área da superfície total feita de cera é

$$6hs - \frac{3}{2}s^2 cotg\theta + \frac{3s^2\sqrt{3}}{2sen\theta}.$$

Para h e s dados, esta área é uma função do ângulo variável θ e, assim, a denotamos $f(\theta)$, ou seja,

$$\acute{A}rea\ lateral\ total = f(\theta) = 6hs + \frac{3}{2}s^2\left(-cotg\theta + \frac{\sqrt{3}}{sen\theta}\right).$$

Avaliar o ângulo θ que minimiza a área total do alvéolo

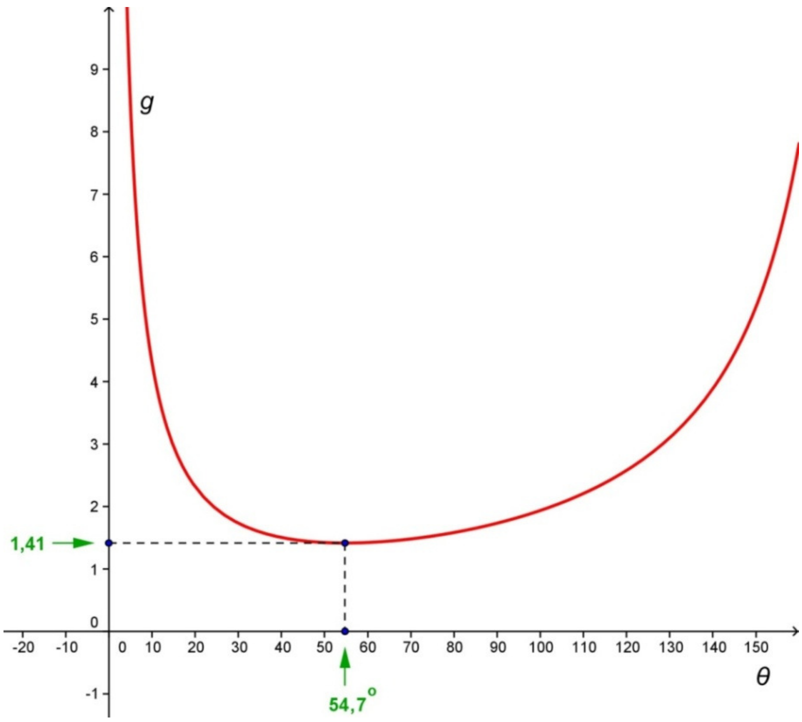
Na expressão da área total do alvéolo, isto é, $f(\theta)$ da seção anterior, somente a expressão entre parênteses contém a variável θ. Denotamos esta expressão por

$$g(\theta) = -cotg\theta + \frac{\sqrt{3}}{sen\theta}.$$

Além disso, como já notamos, para h e s dados, o valor mínimo de $f(\theta)$ ocorrerá quando o ângulo for tal que minimiza $g(\theta)$.

O valor mínimo de $g(\theta)$

A seguir apresentamos o gráfico da função g no qual aparece em destaque o valor de θ para o qual a função assume o valor mínimo. O ângulo em que a função assume o valor mínimo é aproximadamente $54{,}7^o$.



O cálculo do valor de θ para o qual a função g assume o valor mínimo envolve técnicas de cálculo diferencial. Mas, um modo adequado ao nível do ensino médio para avaliar esse valor é utilizando um programa computacional como, por exemplo, o programa livre GeoGebra (disponível para download em www.geogebra.org/cms/).

Após a instalação do programa proceda do seguinte modo:

Como o GeoGebra realiza todos os cálculos internos em radianos, o ângulo θ (graus) deve ser multiplicado, na expressão da função g, pela constante π/180 para converter graus em radianos, ou seja,

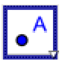
$$g(\theta) = -cotg\left(\frac{\pi}{180}\theta\right) + \frac{\sqrt{3}}{sen\left(\frac{\pi}{180}\theta\right)}.$$

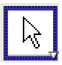
Além disso, como o GeoGebra reserva a letra x para a variável independente de uma função de uma variável, devemos substituir θ por x na expressão da função g.

Assim, digite na linha de comandos do programa, que fica na base da tela, a expressão da função g do seguinte modo:

g(x) = - (cos(π / 180 x) / sin(π / 180 x)) + sqrt(3) / sin(π / 180 x)

O símbolo π pode ser encontrado no menu de letras gregas que fica à direita da linha de comandos. A seguir, para melhorar a visualização, selecione *Janela de Visualização* no menu *Opções* que se encontra na barra no topo da tela. Configure o EixoX para min: -5 e max: 160, e o EixoY para min: -2 e max: 10.

Com o recurso 

selecionado, aponte o cursor para o desenho do gráfico e coloque um ponto em qualquer lugar do gráfico da função. Em seguida, com o recurso  selecionado, movimente o ponto colocado e observe os valores de suas coordenadas para avaliar para qual ponto a função assume seu valor mínimo. Isto acontecerá para $\theta = x = 54{,}7^o$. (Obs.: as coordenadas do ponto aparecem na *Janela de Álgebra* á esquerda da tela)

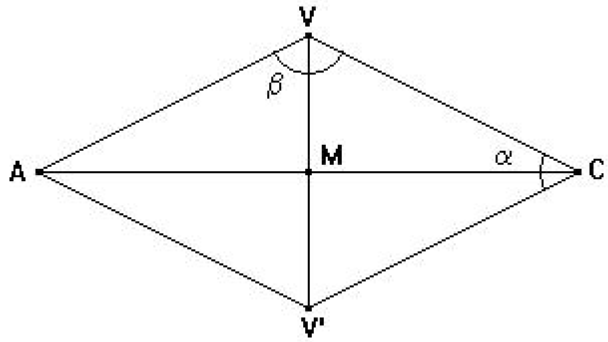
Comentário: No programa, o símbolo º representa o valor da constante π/180 utilizada para converter graus em radianos. Assim, a função g também pode ser inserida na linha de comandos da seguinte forma:

g(x)=-cos(xº) / sin(xº) + sqrt(3) / sin(xº)

O símbolo º pode ser encontrado no primeiro menu à direita da linha de comandos.

Cálculo algébrico dos ângulos dos losangos

Nosso objetivo a seguir é obter os ângulos α e β.



Como já vimos, a medida do segmento CM é $\frac{s}{2}\sqrt{3}$ e a medida do segmento VM é $\frac{s}{2sen\theta}$. Considerando o triângulo retângulo VMC temos

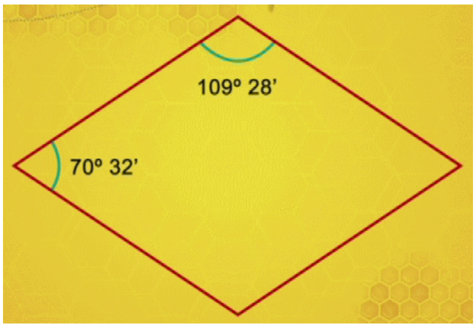
$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{VM}{CM} = \frac{\frac{1}{2sen\theta}}{\frac{s}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}sen\theta} \text{ ,}$$

o que implica $\frac{\alpha}{2} = arctg\frac{1}{\sqrt{3}sen\theta}$. Logo, $\alpha = 2arctg\frac{1}{\sqrt{3}sen\theta}$.

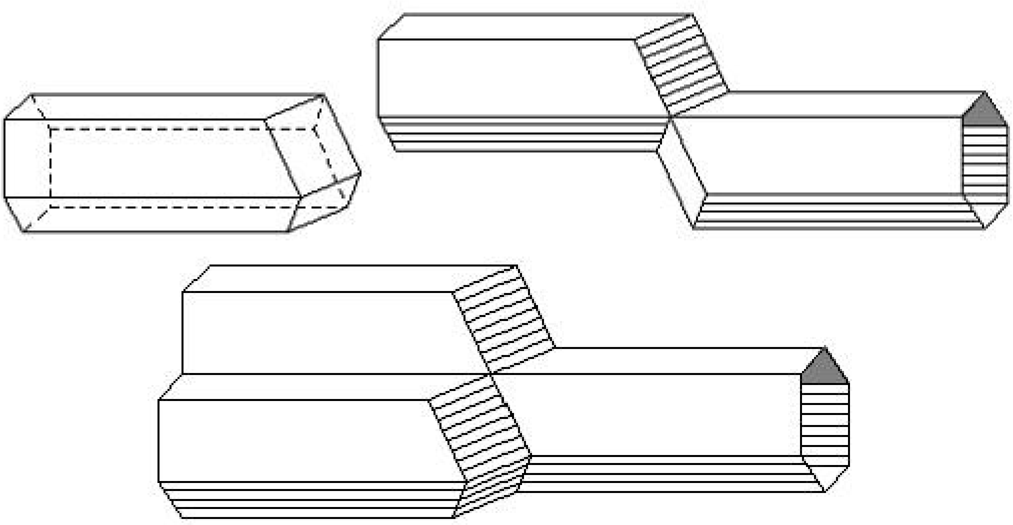
Finalmente, considerando a aproximação $\theta = 54{,}73554$ e utilizando uma calculadora ou programa computacional encontramos

$$\alpha = 70^o 32' \text{ e } \beta = 109^o 28'$$

onde $\alpha + \beta = 180^o$.



Assim, verificamos que as abelhas constroem os alvéolos da forma mais econômica!



Sugestões de atividades

Antes da execução

Sugerimos que o professor realize junto com os alunos as seguintes atividades:

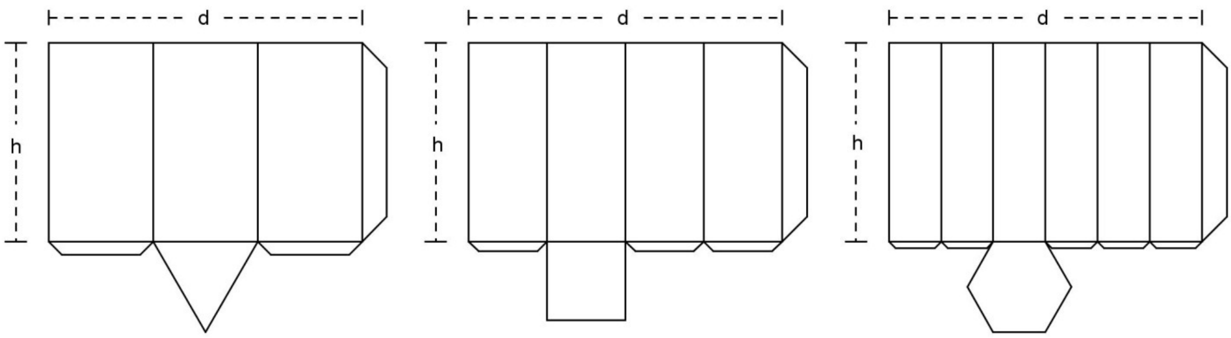
Atividade 1

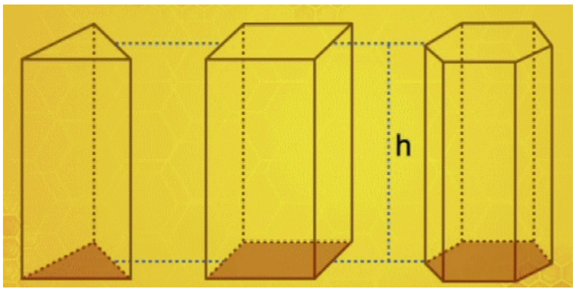
Desenhar em uma folha de cartolina e recortar 10 triângulos equiláteros e congruentes, 10 quadrados congruentes, 10 pentágonos regulares e congruentes, 10 hexágonos regulares e congruentes, 10 heptágonos regulares e congruentes e 10 octógonos regulares e congruentes.

Tentar fazer um ladrilhamento apenas com os triângulos, e verificar se é possível conseguir um ladrilhamento sem superposição e sem que ocorram espaços vazios. A seguir fazer o mesmo com os quadrados e depois com os pentágonos, e assim sucessivamente com todos os polígonos regulares. Através da experiência, dizer quais polígonos regulares podem ser utilizados para fazer o ladrilhamento, isto é, quais podem ser justapostos sem que haja superposição e sem que ocorram espaços vazios.

Atividade 2

Em uma folha de papel cartão fazer a planificação de um prisma triangular, de um prisma quadrangular e de um prisma hexagonal, como mostra a ilustração, recortar e montar os três prismas.





Note que os prismas são abertos em cima, tem a mesma altura h, os polígonos das bases são regulares e as áreas laterais são iguais. Pela ilustração da planificação, as áreas laterais dos três são iguais à área de um retângulo de medidas h e d, portanto, a área lateral dos prismas é igual ao produto $h.d$.

Encher um dos prismas com bolinhas de isopor (ou feijões) e, depois, passar as bolinhas para outro prisma para compará-los quanto ao volume. Fazer o mesmo com os outros prismas e decidir qual dos prismas tem maior volume.

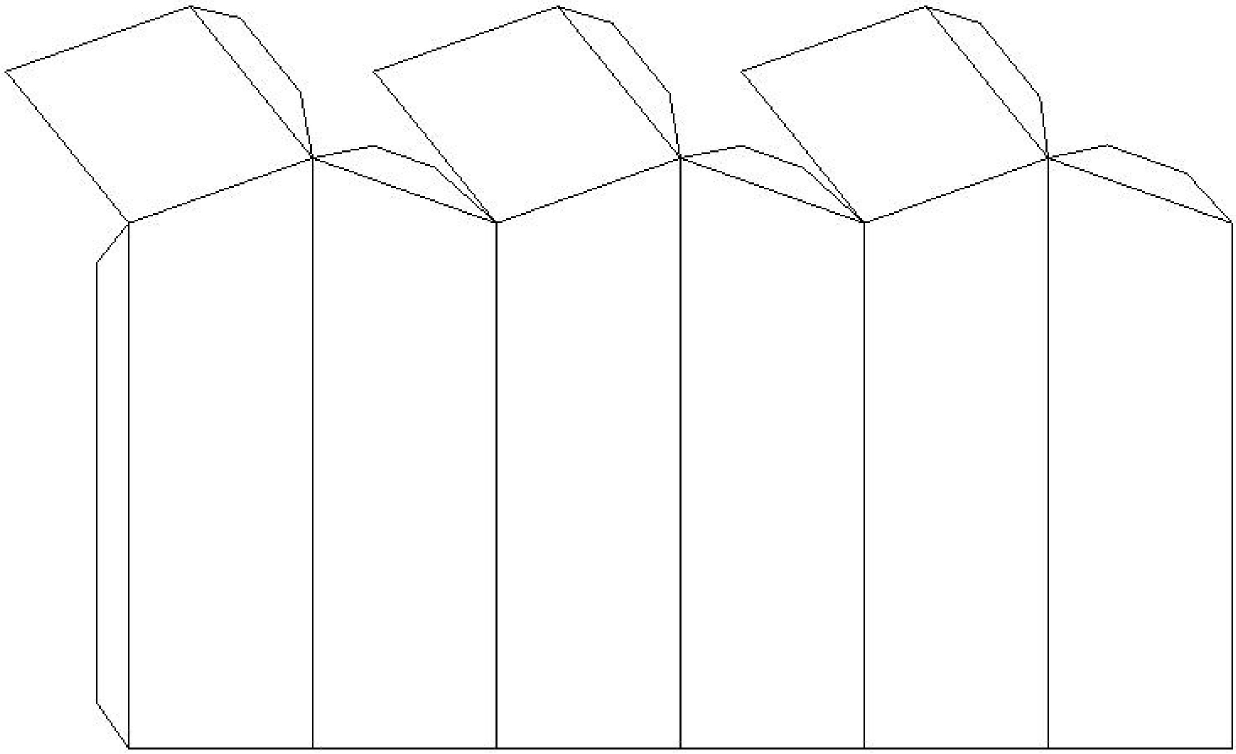
Depois da execução

Tendo como referência o desenvolvimento apresentado neste guia, sugerimos que o professor oriente os alunos a realizarem as seguintes questões:

1. Mostrar que as únicas possibilidades para ladrilhar o plano com polígonos regulares e congruentes de apenas um tipo são: ou com triângulos equiláteros e congruentes; ou com quadrados congruentes; ou com hexágonos regulares e congruentes.

2. Considerando os prismas da atividade 2 de *Antes da execução*, mostrar, utilizando as fórmulas de volumes convenientes, que o volume do prisma hexagonal é o maior.

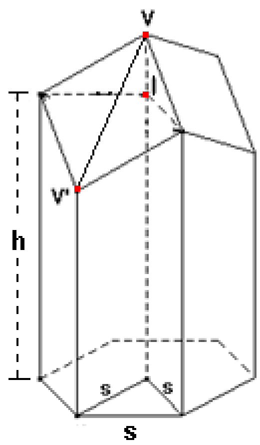
3. Ampliar a planificação a seguir, recortar e montar um modelo de um alvéolo. Convém que todos os alunos ampliem com o mesmo fator, pois assim depois de montados podem ser justapostos para formar um favo de abelhas.



4. Encontrar a fórmula da área lateral total de um alvéolo, ou seja, mostrar que essa área é dada por

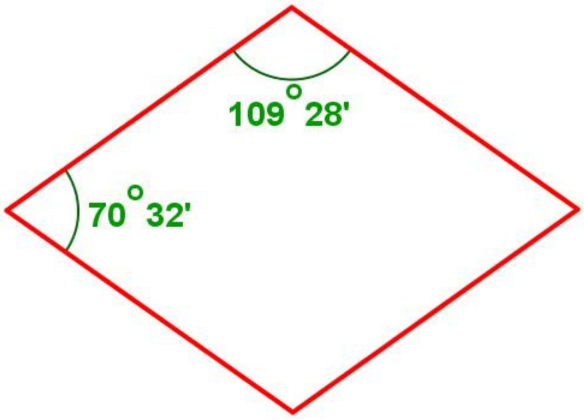
$$\acute{A}rea\ lateral\ total = f(\theta) = 6hs + \frac{3}{2}s^2\left(-cotg\theta + \frac{\sqrt{3}}{sen\theta}\right).$$

onde s e h são como mostra a ilustração e $\theta = I\hat{V}V'$.



5. Observando a expressão da área lateral total do alvéolo concluímos que, para h e s dados, a área é mínima quando $-cotg\theta + \frac{\sqrt{3}}{sen\theta}$ for mínimo. Denotar $g(\theta) = -cotg\theta + \frac{\sqrt{3}}{sen\theta}$ e utilizar o programa GeoGebra para investigar para qual valor de θ a função g assume valor mínimo.

6. Determinar os valores dos ângulos dos losangos de fechamento do alvéolo.



Sugestões de leitura

BATSCHELET, E. *Introdução à Matemática para Biocientistas.* Tradução. Rio de Janeiro: Interciência; São Paulo: Ed. Da Universidade de São Paulo, 1978, p.252-255.
TAHAN, M. *As Maravilhas da Matemática.* 6. ed. Rio de Janeiro: Edições Bloch, 1987, p.105-112.
RODRIGUES, C. I., REZENDE, E. Q. F., QUEIROZ, M. L. B., BEGNAMI, C. N. *Biologia e Geometria - A Geometria dos Favos das Abelhas*. Projeto Pró-Ciências- A matemática no ensino médio por meio de atividades interdisciplinares, 2001.
VASCONCELOS, A. C. *Abelhas: A Matemática dos alvéolos.* www.apacame.org.br/mensagemdoce/59/artigo.htm. Acesso: 04 de julho de 2011.
HOHENWARTER, M., PREINER J. *Ajuda GeoGebra 3.0.* Disponível em www.geogebra.org, 2007.

Ficha técnica

Autoras: *Claudina Izepe Rodrigues e Eliane Quelho Frota Rezende*
Revisão: ________
Coordenação de audiovisual: *José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico: *Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*