Matemática Multimídia

Números e funções

Guia do Professor

Vídeo

A espera da meia-noite

Série **Matemática na Escola**

Objetivos

1. Apresentar o problema clássico do “Paradoxo de Zenon”
2. Introduzir conceitos de limite de sequências

ATENÇÃO Este Guia do Professor serve apenas como apoio ao vídeo ao qual este documento se refere e não pretende esgotar o assunto do ponto de vista matemático ou pedagógico.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

A espera da meia-noite

Série
Matemática na Escola

Conteúdos
Funções. Noções de limite de funções.

Duração
Aprox. 10 minutos.

Objetivos
1. Apresentar o problema clássico do "Paradoxo de Zenon".
2. Introduzir conceitos de limite de seqüências.

Sinopse
O segurança Claudemir está à espera do fim do seu horário de trabalho, quando entregará o turno para o seu companheiro Adilson. Entretanto, lhe parece que a espera vai demorar infinitamente.

Material relacionado
Áudios: *Infinito;*
Vídeos: *Hotel Hilbert, Grande Hotel.*

Introdução

Sobre a série

A série Matemática na Escola aborda o conteúdo de matemática do ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série usualmente são informativos e introdutórios de um assunto a ser estudado em sala de aula pelo professor. Os programas são ricos em representações gráficas para dar suporte ao conteúdo mais matemático e pequenos documentários trazem informações interdisciplinares.

Sobre o programa

O programa trata do problema conhecido classicamente como “O paradoxo de Zenon” para ilustrar o conceito de limites de seqüências.

O conceito de limite, apesar de não estar tradicionalmente incluso nos currículos de ensino médio, possui um apelo intuitivo bastante interessante e passível de exposição aos alunos.

Os “Paradoxos de Zenon” é o nome geralmente dado ao conjunto de paradoxos exposto por Zenon de Eléia para demonstrar o absurdo de algumas teses associadas à corrente filosófica de Parmênides de Eléia, seu mestre. Todos os paradoxos contêm, essencialmente, o mesmo conteúdo matemático e, por trás deles, está a noção de limite de seqüência. Apesar de terem sido propostos por volta de 450 a. C, eles só foram completamente formalizados (e compreendidos) no século XVII d. C, com o advento do cálculo diferencial por Leibniz e Newton, de maneira paralela.

Alguns enunciados dos paradoxos são:

1 – (O paradoxo da flecha) Se um atirador lança uma flecha para um alvo, para atingir o seu destino ela terá que atingir metade do destino. Logo depois, terá que atingir metade do restante, e assim

sucessivamente. Deste modo, a flecha nunca atingirá o seu alvo, pois é possível dividir o espaço restante quantas vezes se queira.

Fig.1 O Paradoxo da Flecha (ou da Dicotomia) ilustrado

2 – (O paradoxo de Aquiles) Numa corrida de Aquiles contra uma tartaruga em que a tartaruga tenha saído na frente, o corredor nunca alcançará o animal, já que, para alcançar ele, tem que ter alcançado o ponto em que o animal partiu. Entretanto, a tartaruga está movimentando-se, então, logo após alcançar o primeiro ponto, tem que alcançar o ponto em que a tartaruga estava, entretanto ela está movimentando-se, de modo que, quando Aquiles alcançá-lo, a tartaruga já vai ter se movido, e assim sucessivamente.

O terceiro enunciado, proposto pelo filme, é o de que o tempo de espera até o fim do turno de um segurança nunca irá terminar, já que, para terminar, ele terá que esperar até a metade do tempo restante, e assim sucessivamente. Neste caso, temos que a seqüência matemática que descreve o quanto falta para o fim do turno é:

$$A_n = 1/2^n$$

Portanto, na primeira ligação falta uma hora até o fim do turno, na segunda falta meia hora, logo depois um quarto de hora, e etc. O limite desta seqüência é, portanto, 0, e depois de alguma iterações, o número de pontos que estão “próximos” de 0 é arbitrariamente grande.

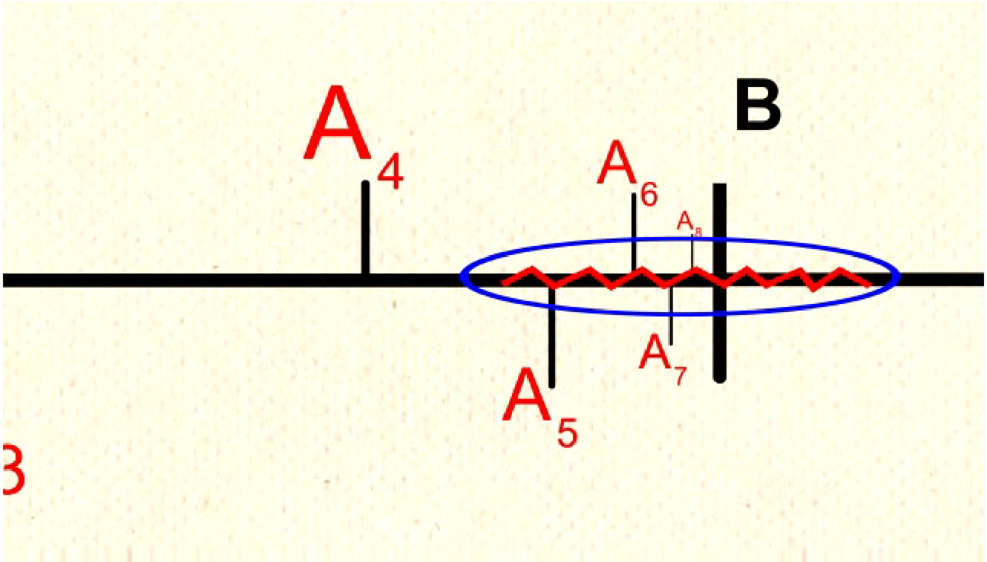

Fig. 2 Noção geométrica de limite (pontos “próximos” do limite)

Outra seqüência que ilustra o conceito de limite e possui uma boa visualização geométrica é o de polígonos regulares. É sabido, da geometria, que a área de um polígono regular é dada por:

$$A=\frac{a.p}{2}$$

Ou seja, apótema vezes perímetro dividido por dois. Sabemos que o apótema é também o raio do círculo inscrito no polígono, de modo que, a medida que se aumente os lados do polígono, ele se aproximará bastante do círculo inscrito. Temos a seguinte seqüência, então:

$$A_n=\frac{a.p_n}{2}$$

Onde n é o número de lados do polígono. Pode-se ver, por um processo de limite, que esta área ficará arbitrariamente próxima da área do círculo, de modo que, denotando por S, a área do círculo, teremos que:

$$S = \frac{a.p}{2} = \frac{r.2\pi.r}{2} = \pi.r^2$$

E, portanto, mostra-se, por um processo de limite, como é possível deduzir a expressão para a área do círculo.

Os paradoxos, tema tratado no programa, ilustram também uma técnica matemática chamada de “redução ao absurdo”. Zenon pretendia, através, da redução ao absurdo, refutar algumas teses de Parmênides. Partindo, portanto, da sua tese, tentou construir exemplos absurdos e, como estes exemplos não ocorriam a prática, a tese de Parmênides deveria estar incorreta. Zenon queria mostrar, portanto, que a noção que eles possuíam de “infinito” e “infinitamente divisível” era problemática. Esta noção só foi resolvida, de fato, com o advento do Cálculo Diferencial por Leibniz.

Sugestões de atividades

Antes da execução

O conceito de limite é um conceito pouco estudado no ensino médio. É possível propor aos alunos desafios para a familiarização com o conceito de limite. Por exemplo, a soma da seguinte série:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Pode-se pedir explicitamente alguns termos dessa série, por exemplo a soma até o sexto ou sétimo termo para que eles percebam que a série se aproxima bastante do número 2. Qual seria, então, a relação disto com a fórmula de soma de uma PG ?

Depois da execução

Depois da execução, o professor pode sugerir alguns desafios relacionados a somas de sequências, para deixar mais claro o conceito de limite, sem muita formalização. É importante deixar claro para os alunos que uma seqüência pode não possuir limite, e para ilustrar isso é proposto o terceiro problema abaixo. O primeiro problema tem caráter desafiador de modo que é possível apenas expor a sua resposta, depois de pedir para os alunos pensarem um pouco sobre ele.

Problema 1 (Desafio): Calcule a expressão:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

Resposta: Vamos chamar a expressão de *S*. Portanto, temos:

$$S=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

É uma expressão recursiva infinita, isto é,

$$S=\sqrt{2+S}$$

Portanto

$$S^2-S-2=0$$

Que é uma equação de segundo grau e as suas soluções são $S = -1$ e $S = 2$. Como a questão se trata de uma raiz, a solução desejada é a positiva.

Problema 2: Calcule o valor da seqüência de frações:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}$$

Resposta: Utilizando o mesmo raciocínio da questão anterior, chegamos em:

$$S=1+\frac{1}{S}$$

E, resolvendo como equação de segundo grau temos, descartando a solução negativa,

$$S=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Problema 3: Quanto vale o valor do limite da seqüência: +1,−1,+1,−1...

Resposta: O objetivo aqui é que o aluno, ao invés de tentar demonstrar formalmente, argumente que esta seqüência parece não ter limite, pois os números impares são positivos e os pares são negativos, de modo que ela não se aproxima de nenhum número específico à medida que o número de termos cresce.

Sugestões de leitura

G. Iezzi (2005). Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 8: Limites, derivadas, noções de integral. Atual Editora

H. Eves (2002) Introdução á história da matemática (Capítulo 11). Editora da UNICAMP

Ficha técnica

Autor *Antonio Carlos de Andrade Campello Junior*
Revisora *Laura Leticia Ramos Rifo*
Coordenador de audiovisual *Prof. Dr. José Eduardo Ribeiro de Paiva*
Coordenador acadêmico *Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira*

Universidade Estadual de Campinas
Reitor *Fernando Ferreira Costa*
Vice-reitor *Edgar Salvadori de Decca*
Pró-Reitor de Pós-Graduação *Euclides de Mesquita Neto*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Diretor *Jayme Vaz Jr.*
Vice-diretor *Edmundo Capelas de Oliveira*