Matemática Multimídia

GEOMETRIA E MEDIDAS

NÚMEROS E FUNÇÕES

O EXPERIMENTO

Experimento

Transformação de Möbius

Objetivos da unidade

1. Estudar o efeito da translação, rotação e dilatação no plano complexo;
2. Pôr em prática propriedades de matrizes;
3. Realizar propriedades de números complexos;
4. Apresentar a transformação de Möbius.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Transformação de Möbius

O experimento

Sinopse

Depois de visualizar a translação, a rotação e a dilatação de um triângulo no plano complexo através de uma multiplicação de matrizes, os alunos deverão obter as formas analíticas de tais transformações. Em seguida, será apresentado um caso particular da Transformação de Möbius e algumas de suas interessantes características.

Conteúdos

- Números Complexos, Interpretação Geométrica;
- Matrizes, Propriedades e Aplicações;
- Geometria Plana, Transformações.

Objetivos

1. Estudar o efeito da translação, rotação e dilatação no plano complexo;
2. Pôr em prática propriedades de matrizes;
3. Realizar propriedades de números complexos;
4. Apresentar a transformação de Möbius.

Duração

Três aulas: será necessária uma aula de explicações entre as atividades sugeridas.

Material relacionado

- Vídeo: Um sonho complexo;
- Software: Movimentos complexos.

Matemática Multimídia

Introdução

Neste experimento, apresentamos aos alunos a formulação matemática de movimentos com os quais eles já estão familiarizados: a translação, a dilatação e a rotação. O estudo dos movimentos da Terra, por exemplo, é um caso famoso de rotação, cujo período é um dia, e de translação, cujo período é um ano. Estes são movimentos que podem ser descritos pela matemática, assim como a dilatação, que pode já ter sido objeto de estudos nas aulas de termodinâmica.

Um dos objetivos da atividade é verificar o resultado da combinação desses movimentos, e isso será feito através de transformações sobre o plano complexo, exigindo do aluno, além do conhecimento das operações com números complexos, experiência com operações matriciais.

A primeira etapa do experimento tem a função de apresentar aos alunos os movimentos básicos, ou seja, translação, rotação e dilatação (ou contração) geometricamente. Na segunda etapa os movimentos da Etapa 1 serão analisados analiticamente. Já na terceira etapa, os alunos investigarão casos em que os movimentos, de certa forma, ocorrem simultaneamente, chegando enfim ao objetivo da atividade: conhecer a Transformação de Möbius.

O Experimento

Material necessário

- Régua;
- Transferidor.

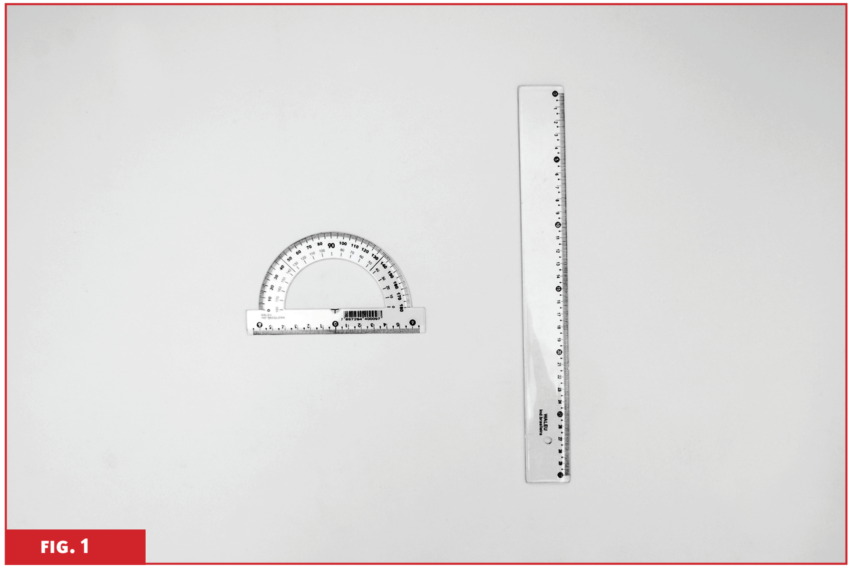


FIG. 1

Comentários iniciais

Chamamos de Transformação de Möbius uma função da forma

$$f(z) = \frac{(az+b)}{(cz+d)},$$

onde a, b, c, e e z são números complexos e $ad - bc \neq 0$. Quando aplicada sobre uma figura, essa função realiza uma composição de transformações dentre as que seguem: translação, rotação, dilatação e inversão.

A transformação possui uma representação matricial, dada da seguinte forma:

Primeiro fazemos o produto

$$\begin{pmatrix} z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+b & cz+d \end{pmatrix}.$$

Por fim, dividimos o primeiro elemento da matriz linha pelo segundo, obtendo $\frac{az+b}{cz+d}$.

Nesta atividade, usaremos $c = 0$ para evitar a inversão, por ser uma transformação de maior complexidade e que não pode ser exemplificada com situações simples, ao contrário das outras três, rotação, dilatação (ou contração) e translação.

Analisaremos o efeito dessas transformações em três pontos no plano complexo, formando um triângulo, para simplificar ainda mais a visualização.

O Fechamento deste experimento ressalta duas propriedades da Transformação de

* *Veja o Guia do Professor para o detalhamento das transformações na forma trigonométrica dos números complexos.*

Möbius: o fato de ela ser uma transformação conforme (que preserva os ângulo), e de o fator de dilatação, quando $c = 0$, ser $|a/d|$.

Preparação

Antes de iniciar a ETAPA 1, apresente a definição de *Transformação de Möbius* e mostre como ela pode ser expressa na forma matricial, como foi apresentado em COMENTÁRIOS INICIAIS. Também, prepare uma lista de matrizes nos formatos apresentados a seguir. Cada grupo de quatro alunos deve receber três matrizes, uma de cada tipo.

* *Nada impede que mais de um grupo receba a mesma matriz. Porém, seria interessante ter pelo menos três de cada, para que seja possível perceber o tipo de matriz que realiza cada movimento.*

Transformação	Translação	Dilatação ou contração	Rotação
Matriz	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ $b \in \mathbb{C}$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ $d = \pm i$

TABELA 1

Exemplos

- Translação

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2+2i & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-3i & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3+i & 1 \end{pmatrix}.$$

- Dilatação

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rotação

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Matrizes e transformações

ETAPA 1

As matrizes devem ser preparadas antes da aplicação da atividade, de acordo com os padrões apresentados acima. A quantidade de matrizes depende do número de grupos na sala: cada grupo deve receber uma matriz de cada tipo.

Os grupos deverão escolher três números complexos e marcá-los em um plano de Argand-Gauss. Oriente-os a ligá-los criando um triângulo, como na FIGURA 2.

As transformações serão realizadas sobre os pontos, mas a construção do polígono auxilia a visualização do movimento.

! *Podemos dizer que o polígono sofre a transformação, pois ela ocorre sobre todos os pontos da fronteira e do seu interior.*

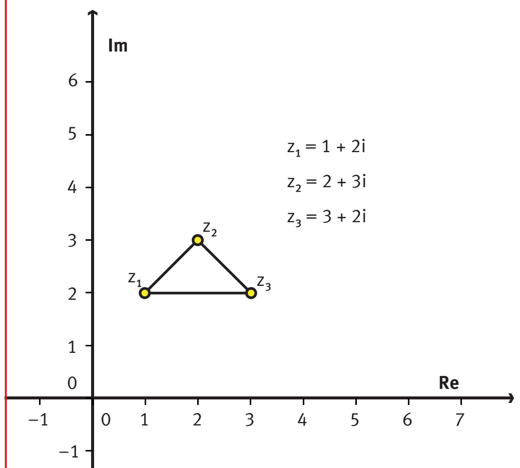


FIG. 2

Após receber as matrizes, os grupos deverão aplicá-las a cada um dos vértices do triângulo.

Explique que o cálculo com as matrizes deve ser realizado da seguinte forma:

Primeiro fazer o produto

$$\begin{pmatrix} z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

e, em seguida, dividir o primeiro elemento da matriz linha obtida pelo segundo.

Para evitar sobreposição das figuras, sugira que os grupos desenhem um plano para cada matriz.

! *Lembre-os de que a mesma matriz deverá ser aplicada nos três vértices. Só assim a transformação do triângulo estará completa.*

Exemplos

Para $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 2+3_i$ e $z_3 = 3+2_i$, vamos verificar o que ocorre com o triângulo determinado por esses três pontos quando aplicamos a ele as transformações associadas a cada uma das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2+2i & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

- Translação

Com

$$\begin{pmatrix} z_j & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2+2i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_j + 2 + 2i & 1 \end{pmatrix} \to z'_j = z_j + 2 + 2i,$$

obtemos $z'_1 = 3+4i$, $z'_2 = 4+5i$ e $z'_3 = 5+4i$. O resultado da operação está representado abaixo:

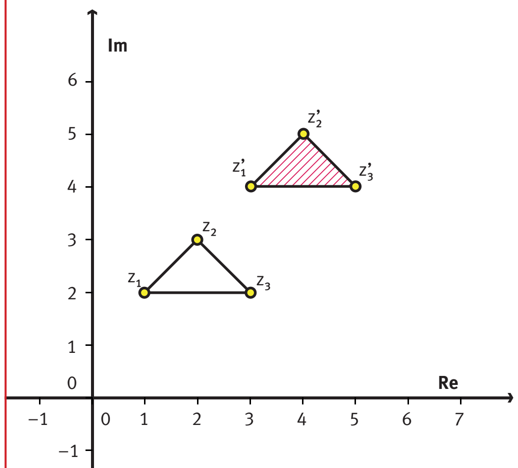


FIG. 3

- Dilatação e contração
  Com

$$\begin{pmatrix} z_j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_j & 1 \end{pmatrix} \to z_j'' = 2z_j,$$

obtemos $z_1'' = 2+4i$, $z_2'' = 4+6i$ e $z_3'' = 6+4i$. O resultado da operação está representado abaixo:

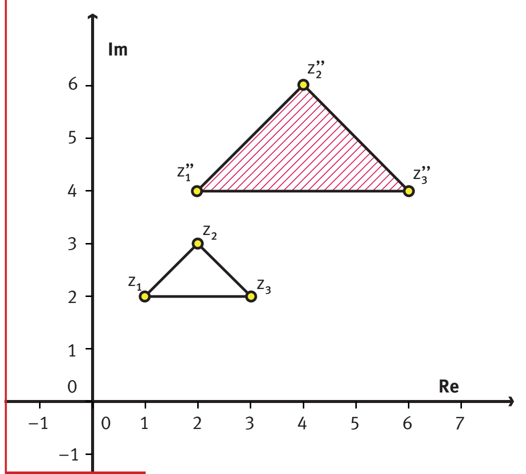


FIG. 4

Neste exemplo, como $a = 2$, a transformação correspondente é uma dilatação. Se for considerado a entre zero e um, a transformação correspondente será uma contração.

- Rotação
  Com

$$\begin{pmatrix} z_j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_j & 1 \end{pmatrix} \to z_j''' = \frac{z_j}{i} = -iz_j,$$

substituindo z_j, obtemos $z_1''' = 2-i$, $z_2''' = 3-2i$ e $z_3''' = 2-3i$.

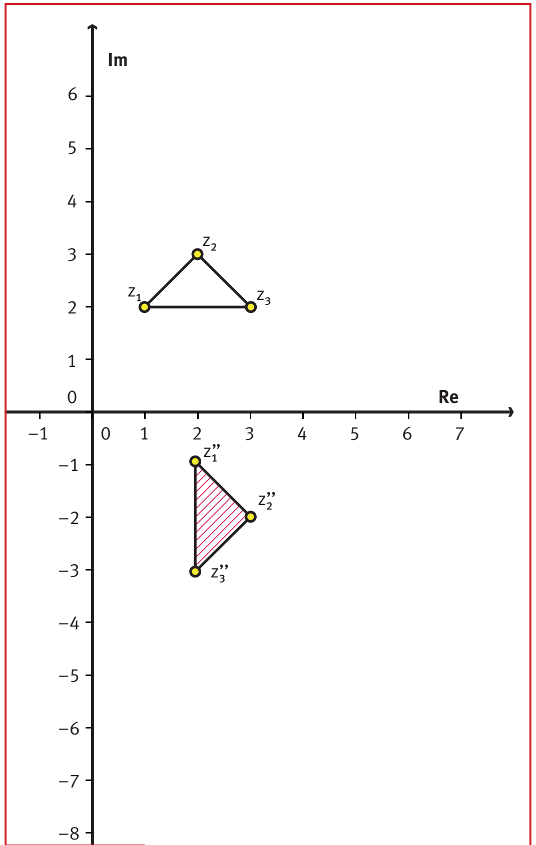


FIG. 5

Sugerimos que, quando os grupos terminarem os cálculos, a lousa seja dividida em três partes, uma para cada tipo de movimento (rotação, translação e dilatação (ou contração)). Cada grupo, então, escreve a matriz que realizou o movimento no respectivo espaço. Assim, com vários exemplos de matrizes que realizam determinada transformação, os alunos poderão perceber que as matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

com $b \in \mathbb{C}$, realizam translações; as do tipo

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com a um número real positivo, realizam dilatações se $a > 1$ e contrações se $0 < a < 1$; as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

com $d = \pm 1$, realizam rotações.

Explicação das transformações e suas formas analíticas

ETAPA 2

Inicialmente, deve ser comentado com os alunos cada uma das transformações da ETAPA 1 e, a seguir, oriente-os sobre como encontrar suas respectivas formas analíticas, mostrando como identificar o tipo de transformação por meio de sua forma analítica.

Explicação das transformações

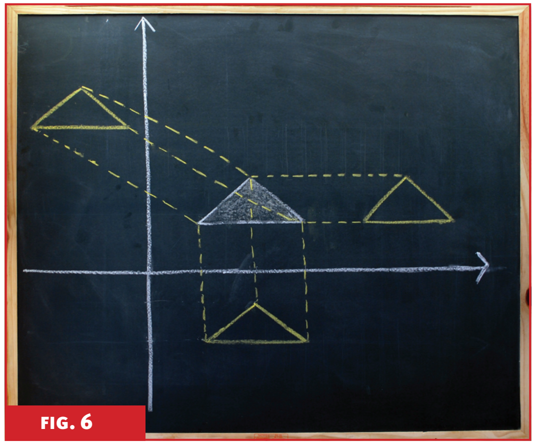
- Translação

  As figuras abaixo podem ser usadas para ilustrar a translação. O que queremos é que os alunos percebam que a translação apenas faz o polígono passear, sem rodar ou mudar de tamanho e, também, que as medidas dos lados e dos ângulos são mantidos.

  As matrizes do tipo

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

  com $b \in \mathbb{C}$, realizam translações.



Na figura, a partir do triângulo central, branco, foram feitas três translações.

Deve ser ressaltado que, para ocorrer uma translação horizontal, precisamos de $b \in \mathbb{R}$, ao contrário do que ocorre no caso da translação vertical, em que b é imaginário puro; e no outro caso, quando b possui tanto a componente real, quanto a complexa não nula, a translação ocorre nos dois sentidos.

- Dilatação e contração

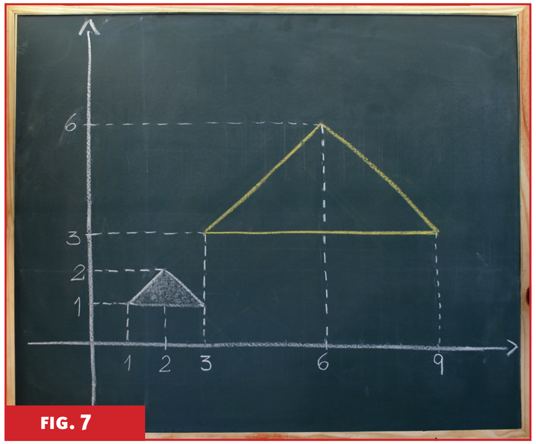
A dilatação aumenta proporcionalmente as medidas do polígono e, por sua vez, a contração as diminui proporcionalmente.

Um detalhe importante da dilatação e da contração é o fato de o processo mudar também, na mesma proporção, as distâncias entre um ponto do polígono e a origem. Isto é, na dilatação, se o polígono tiver suas medidas dobradas, a distância de um vértice à origem, por exemplo, também será dobrada e, na contração, se as medidas foram divididas por dois, a distância de um vértice à origem também será dividida por dois. Esse efeito pode causar a impressão de uma translação.

As matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

com $a \in \mathbb{R}$, realizam dilatações se $a > 1$, e contrações se $0 < a < 1$. Note que se $a = 1$ a transformação é a identidade.



Na figura acima, o triângulo pequeno foi dilatado com $a = 3$, dando origem ao triângulo grande.

Dependendo da posição do polígono, a impressão de translação pode desaparecer. É o caso, por exemplo, de um quadrado centrado na origem: após a dilatação, seu centro permanece na origem, como na figura a seguir.

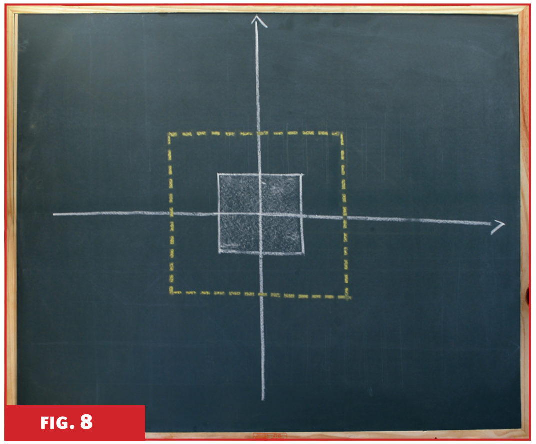


FIG. 8

Nesta etapa, consideramos a um número real positivo. Se a é um número complexo, não real, o movimento realizado não será apenas o de dilatação ou de contração.

Para obter dilatações ou contrações, podemos, também, considerar matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix},$$

com a e d números complexos tais que o quociente a/d é um número real positivo; mas deixaremos para a terceira etapa a descoberta do papel desses dois parâmetros juntos em uma matriz.

- Rotação
  A rotação faz com que o polígono apenas gire, mantendo sua forma e suas medidas. As matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

com $d \pm 1$, realizam rotações.

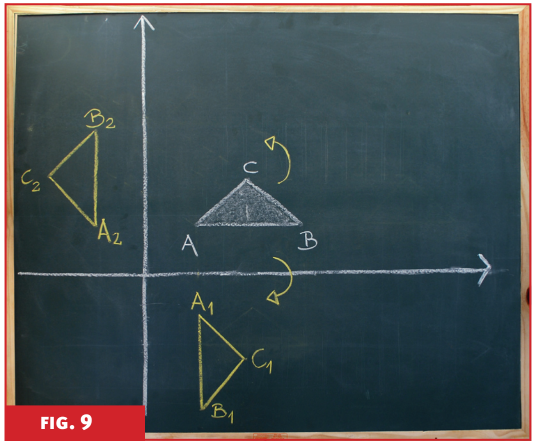


FIG. 9

Na figura, o triângulo branco, ABC, foi rotacionado com $d = i$ para obter $A_1B_1C_1$, e com $d = -i$ para obter $A_2B_2C_2$.

Para obter rotações, podemos, também, considerar matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix},$$

com a e d números complexos tais que o quociente a/d é um número complexo de módulo igual a 1. Veja no Guia do Professor a justificativa para este fato.

Deixamos para terceira etapa que o aluno perceba que, na transformação de Möbius, a rotação e a dilatação normalmente ocorrem juntas, através de um fator multiplicativo. As condições impostas às matrizes sugeridas até aqui impedem essa ocorrência conjunta.

! *Lembre-se de que d fica no denominador. Por isso, i resulta na primeira rotação e $-i$ na segunda.*

Formas analíticas

Nesta etapa, explique aos alunos como encontrar a forma analítica geral de cada uma das transformações da Etapa 1. Isto é, realize as mesmas operações com as matrizes, porém, de forma genérica. As formas analíticas de cada uma das transformações associadas às matrizes da ETAPA 1 são:

Translação

$$\begin{pmatrix} z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+b & 1 \end{pmatrix} \to z+b,\, b \in \mathbb{C}$$

Dilatação e contração

$$\begin{pmatrix} z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az & 1 \end{pmatrix} \to az,\, a \in \mathbb{R} \text{ e } a>0$$

Rotação

$$\begin{pmatrix} z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & d \end{pmatrix} \to \frac{z}{d},\, d = \pm i.$$

A seguir, analise essas formas analíticas utilizando as interpretações geométricas das operações de números complexos. Os alunos devem conseguir compreender a relação que existe entre as operações com números complexos envolvidas na forma analítica de uma transformação e o efeito que ela causa no plano: a soma de números complexos causa a translação no plano, a multiplicação por um valor real positivo causa a dilatação ou a contração e a multiplicação por $-i$ ou i provoca rotações de $90°$ e de $-90°$, respectivamente.

A figura abaixo apresenta a soma de dois números complexos, $z = t + si$ e $w = u + vi$:

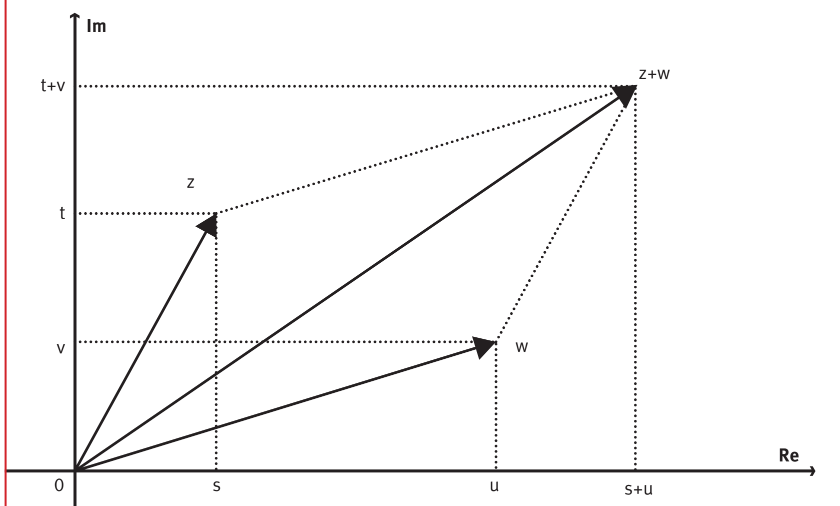


FIG. 10 *Interpretação geométrica de z + w.*

Para interpretar geometricamente a multiplicação de números complexos, utilizamos forma trigonométrica:

$$z = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$$

$$w = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

E obtemos,

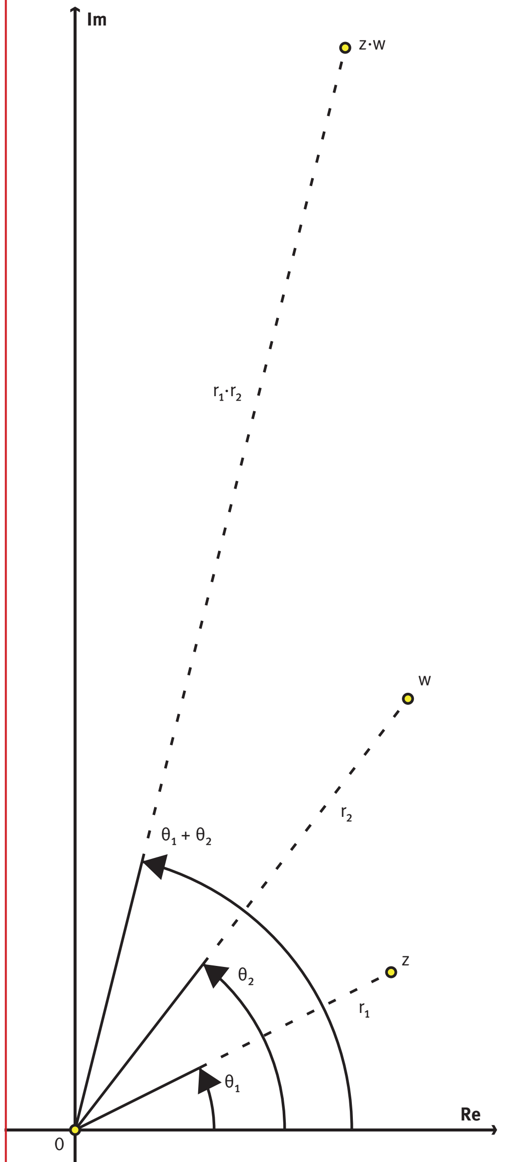


FIG. 11 *Interpretação geométrica de $z \cdot w$.*

ETAPA 3

Troca de matrizes

Cada grupo cria uma matriz e troca com outro. Os alunos devem descobrir qual é a transformação que a matriz causará quando aplicada a uma figura.

Sugira que os grupos levantem hipóteses sobre as transformações antes de aplicarem a matriz em alguma figura.

Não é simples perceber o que acontecerá apenas analisando os valores, mas os grupos podem analisar a forma analítica correspondente a uma matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix}:$$

$$\begin{pmatrix} z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+b & d \end{pmatrix} \to \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Dessa forma, utilizando as interpretações geométricas de números complexos, os alunos podem decidir quais as transformações dentre as transformações básicas, a saber, translação, dilatação, contração e rotação, que compõem a transformação correspondente à matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Fechamento

Parâmetros sem restrições
Observe que na Etapa 1 usamos apenas a como sendo um número real positivo na matriz do tipo

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $d = \pm i$ na matriz do tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} |d| = 1.$$

Porém, é importante notar que a dilatação ou contração não ocorrerá sozinha se a não for real positivo. E, para a matriz do tipo

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

além dos casos analisados na Etapa 1, ou seja, quando $d = \pm i$, também ocorrerá apenas rotação se o módulo do número complexo d for igual a 1, isto é, $|d| = 1$, e a rotação não ocorrerá sozinha se $|d|$ for diferente de 1. Veja no Guia do Professor justificativas para as considerações acima.

Verifique com a classe o resultado das transformações sem as restrições, isto é, com uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com a sendo qualquer número complexo, e o mesmo com uma matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

novamente para qualquer d complexo.

Para isso, escolha o número a com parte imaginária não nula e d qualquer complexo com módulo diferente de 1 para que de fato ocorram os dois movimentos. O que desejamos com isso é que os alunos concluam que nos dois casos ocorrerão tanto dilatação quanto rotação e que, portanto, esses dois parâmetros contribuem para as duas transformações.

A seguir, apresentamos o efeito de uma transformação cuja matriz é do tipo

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

com $a = 5+5i$ e $d = 1+2i$, sobre o triângulo $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 2+3i$ e $z_3 = 3+2i$. Sendo f a transformação correspondente a esta matriz, teremos:

para z_1:
$$\begin{pmatrix} 1+2i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5+5i & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \to f(z_1) = 5+5i\,;$$

para z_2:
$$\begin{pmatrix} 2+3i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5+5i & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \to f(x_2) = 9+7i;$$

para z_3:
$$\begin{pmatrix} 3+2i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5+5i & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \to f(z_3) = 11+3i;$$

Relembre aos alunos que, após realizar a multiplicação matricial, é necessário dividir o primeiro elemento da matriz linha obtida pelo segundo para se obter os pontos da nova figura.

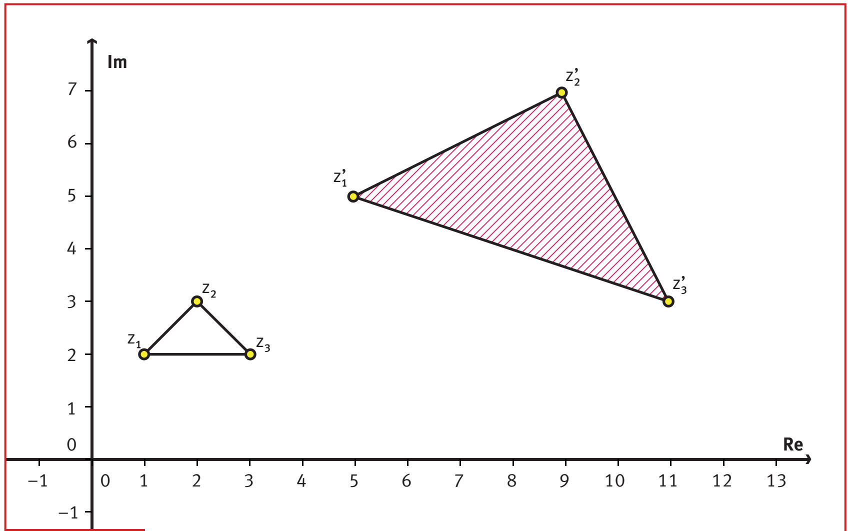


FIG. 12

Propriedades

A Transformação de Möbius possui algumas características interessantes, por exemplo, os ângulos da figura após a transformação são mantidos.

Peça para que os grupos, com o auxílio de um transferidor, meçam os ângulos das figuras antes e depois de realizadas as transformações. Note com eles que, em todos os casos, os ângulos são mantidos; transformações com essa característica são transformações *conformes*.

Como atividade final, sugira que os alunos descubram em quanto o triângulo foi dilatado ou contraído cada vez que tal movimento ocorreu. Valorize e comente cada uma das respostas, por exemplo: a ou $|a|$, a/d etc. Questione-os sobre alguma hipótese ou algum padrão encontrado. Para matriz do tipo

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

é possível mostrar que o fator de dilatação é $|a/d|$, o módulo do número que multiplica z (a demonstração está no Guia do Professor).

Sugerimos um trabalho posterior ao experimento, como uma pesquisa em que os alunos devem buscar vídeos e figuras que ilustrem a Transformação de Möbius: translação, rotação, dilatação, contração e inversão. Vale a pena ver o vídeo Moebius Transformations Revealed, de Douglas N. Arnold e Jonathan Rogness (2007), disponível em: *http://youtu.be/JX3VmDgiFnY*.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autora
Claudina Izepe Rodrigues

Coordenação de redação
Rita Santos Guimarães

Redação
Rafael Santos de Oliveira Alves

Revisores
Matemática
Antonio Carlos do Patricínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara de Oliveira

Fotógrafo
Augusto Fidalgo Yamamoto

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira da Costa
Vice-Reitor e Pró-Reitor de Pós-Graduação
Edgar Salvadori De Decca

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância
Ministério da Ciência e Tecnologia
Ministério da Educação
Governo Federal