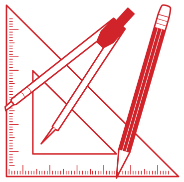
Matemática Multimídia

GEOMETRIA E MEDIDAS

NÚMEROS E FUNÇÕES



GUIA DO PROFESSOR

Experimento

Transformação de Möbius

Objetivos da unidade

1. Estudar o efeito da translação, rotação e dilatação no plano complexo;
2. Pôr em prática propriedades de matrizes;
3. Realizar propriedades de números complexos;
4. Apresentar a transformação de Möbius.

UNICAMP

FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Transformação de Möbius

Guia do professor

Sinopse

Depois de visualizar a translação, a rotação e a dilatação de um triângulo no plano complexo através de uma multiplicação de matrizes, os alunos deverão obter as formas analíticas de tais transformações. Em seguida, será apresentado um caso particular da Transformação de Möbius e algumas de suas interessantes características.

Conteúdos

- Números Complexos, Interpretação Geométrica;
- Matrizes, Propriedades e Aplicações;
- Geometria Plana, Transformações.

Objetivos

1. Estudar o efeito da translação, rotação e dilatação no plano complexo;
2. Pôr em prática propriedades de matrizes;
3. Realizar propriedades de números complexos;
4. Apresentar a transformação de Möbius.

Duração

Três aulas: será necessária uma aula de explicações entre as atividades sugeridas.

Material relacionado

- Vídeo: Um sonho complexo;
- Software: Movimentos complexos.

Matemática Multimídia

Introdução

O estudo das transformações desempenha um papel muito importante em várias áreas da matemática, bem como da ciência como um todo. Uma grande importância das transformações reside no fato de elas tornarem possível transformar problemas aparentemente complicados em problemas análogos com soluções mais simples.

August Ferdinand Möbius, matemático alemão que nasceu em 1790 e morreu em 1868, introduziu o que hoje conhecemos por Transformação de Möbius como sendo uma transformação complexa de variável complexa, definida por uma composição de convenientes transformações mais simples, a saber: translação, rotação, dilatação (ou contração) e inversão.

A proposta deste experimento é apresentar uma maneira simples de introduzir a Transformação de Möbius através de exemplos, utilizando os conceitos e propriedades de matriz e de número complexo. Em especial, são utilizadas as interpretações geométricas das operações de números complexos. Por simplicidade, não vamos considerar transformações que envolvem a inversão em sua composição.

Na primeira etapa, apresentamos os movimentos básicos, ou seja, translação, dilatação (ou contração) e rotação, que compõem a transformação, por meio de seus efeitos sobre um triângulo no plano. Na segunda etapa, são propiciadas condições para que os alunos encontrem a forma analítica associada a cada uma das transformações apresentadas na primeira etapa. A terceira etapa envolve o estudo de transformações que podem ser expressas como composição de pelo menos dois dos movimentos básicos e tem como objetivo desenvolver a habilidade de identificação destes movimentos, assim como de associação entre a forma analítica da transformação e seu comportamento geométrico.

Motivação

O estudo de números complexos na maioria das vezes não é abordado nas aulas do Ensino Médio. O motivo seja talvez pelo fato de não estar em evidência em problemas de nível elementar ou, também, por falta de materiais adequados de apoio ao ensino-aprendizagem.

Este experimento vem mostrar uma aplicação que contempla estes dois aspectos: está em nível adequado para alunos do Ensino Médio e pretendemos que se torne um material de apoio a ser utilizado nas escolas.

Além disso, trata-se de uma interessante aplicação envolvendo a investigação de transformações convenientes no plano através de funções que levam números complexos em números complexos. Esta proposta vem facilitar sobremaneira o estudo dessas transformações com suas atuações em triângulos e mostrar suas relações com matrizes.

O experimento

Comentários iniciais

O desenvolvimento deste experimento propicia rever conceitos de matrizes e suas propriedades, assim como rever o conceito de números complexos, suas operações e propriedades. .

Etapa 1 **Matrizes e transformações**

Nesta etapa, o aluno deve compreender como atua no triângulo cada uma das transformações: translação, rotação e dilatação (ou contração), através da visualização de um exemplo específico.

Antes de iniciar o experimento, o professor poderá fazer uma revisão com os alunos do conceito de números complexos e suas operações e, também, do conceito de matrizes. Além disso, deve ser apresentada a definição de Transformação de Möbius e mostrar como pode ser expressa na forma matricial.

Uma Transformação de Möbius é uma função complexa dada por

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

com a, b, c, d números complexos e $ad-bc \neq 0$. A condição $ad-bc \neq 0$ garante que c e d não podem ser simultaneamente nulos. Além disso, se $c \neq 0$, a função

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

está definida para todo z tal que $z \neq \frac{d}{c}$, enquanto que, se $c = 0$, como $ad-bc \neq 0$, temos d não nulo e

$$f(z) = \frac{az+b}{d},$$

o que implica que f está definida para todo complexo z. Pode ser provado que f é uma composição de rotações, dilatações (ou contrações), translações e inversões. No caso geral, esse resultado está provado no Fechamento deste guia.

No experimento são analisadas as Transformações de Möbius cuja constante complexa c é igual a zero. Assim, a transformação está definida para todo número complexo e, em particular, ela está definida para todos os pontos de um triângulo e para seus pontos interiores. Além disso, neste caso, pode ser provado que f transforma um triângulo em outro cujos vértices são as imagens dos vértices do triângulo inicial. Usaremos essa característica das Transformações de Möbius em que $c = 0$ para investigar seus comportamentos.

Matriz associada a uma Transformação de Möbius

Observando o diagrama a seguir, notamos que f pode ser expressa em notação matricial.

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & \begin{pmatrix} z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+b & cz+d \end{pmatrix} \arrow[d] \\
& f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}
\end{tikzcd}
$$

FIG. 1

Ou seja, podemos obter o valor $f(z)$, multiplicando a matriz linha $\begin{pmatrix} z & 1 \end{pmatrix}$ pela matriz

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

obtendo a matriz $\begin{pmatrix} az+b & cz+d \end{pmatrix}$ e, depois, dividindo o primeiro elemento desta matriz pelo segundo elemento, chegando a

$$\frac{az+b}{cz+d}.$$

Definição

Dizemos que a matriz

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

é uma matriz associada à Transformação de Möbius f, dada por

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

com a, b, c, d constantes complexas e $ad - bc \neq 0$.

Partindo de matrizes 2×2 previamente selecionadas pelo professor, o aluno investigará qual o comportamento geométrico da transformação correspondente. Isso será feito da forma descrita a seguir.

Devem ser escolhidos três números complexos z_1, z_2 e z_3 tais que suas representações no plano complexo formam os vértices de um triângulo. Para uma dada matriz, utilizando a expressão matricial da transformação correspondente, calculam-se os valores $z_1' = f(z_1)$, $z_2' = f(z_2)$ e $z_3' = f(z_3)$, que também definem um triângulo no plano complexo. Analisando visualmente o triângulo inicial e o triângulo obtido pela transformação, o aluno deve descobrir qual movimento leva um triângulo ao outro. Nesta etapa, as transformações envolvidas são: translação, dilatação (ou contração) e rotação. Ademais, não serão utilizadas matrizes que resultam em composição desses movimentos. Assim, será fácil identificar o movimento visualmente.

Cada grupo de alunos receberá três matrizes, sendo que uma resulta em uma translação, outra em uma dilatação (ou contração) e outra correspondendo a uma rotação. As matrizes, nesta etapa, são dos seguintes tipos:

Translação	**Dilatação ou contração**	**Rotação**
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ $b \in \mathbb{C}$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}, a > 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ $d = \pm i$

TABELA 1

Translação

Para matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

com b uma constante complexa, esperamos que os alunos percebam visualmente que o movimento realizado é uma translação.

Também, comparando as conclusões obtidas pelos diversos grupos com relação a estas matrizes, pode ser observado que:

1. se $b = b_1 + b_2 i$, $b_1 \neq 0$ e $b_2 = 0$, isto é, a parte real diferente de zero e a parte imaginária igual a zero, o triângulo se desloca horizontalmente, para a esquerda ou para a direita, uma distância igual a $|b|$;
2. se $b = b_1 + b_2 i$, $b_1 = 0$ e $b_2 \neq 0$, isto é, b é um imaginário puro, o triângulo se desloca na vertical;
3. se $b = b_1 + b_2 i$, $b_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$, o triângulo se desloca nas duas direções.

Além disso, pode ser observado em todos os casos que as medidas dos lados e as medidas dos ângulos são mantidas, isto é, o triângulo inicial e o transformado são congruentes.

Exemplo: Para $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 + 3i$, $z_3 = 3 + 2i$ e $b = 2 + 2i$, temos:

$$\begin{pmatrix} z_j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2+2i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_j + 2 + 2i & 1 \end{pmatrix}, j = 1, 2, 3.$$

Então, $z_j' = f(z_j) = z_j + 2 + 2i$. Assim, $z_1' = 3 + 4i$, $z_2' = 4 + 5i$, $z_3' = 5 + 4i$.

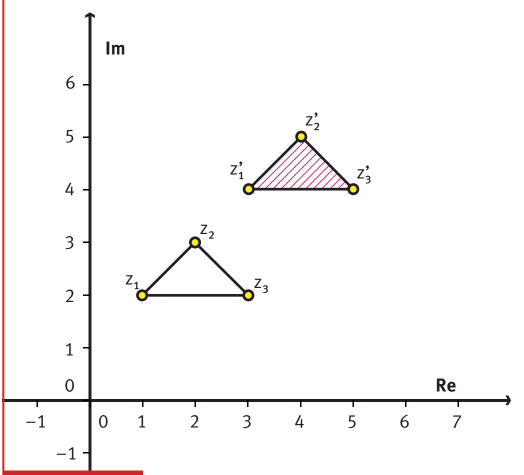


FIG. 2

Note que cada ponto se desloca $2\sqrt{2}$ unidades, isto é, $|2+2i| = 2\sqrt{2}$ unidades na direção do vetor correspondente ao número complexo $2+2i$. Isto corresponde a um deslocamento na horizontal de 2 unidades, seguido de um deslocamento na vertical de 2 unidades.

Dilatação ou contração

Para matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com a uma constante real positiva, esperamos que os alunos percebam visualmente que o movimento realizado é uma dilatação ou uma contração.

Ademais, comparando as conclusões obtidas pelos diversos grupos com relação a matrizes deste tipo, pode ser observado que:

1. se $a > 1$, $a \in \mathbb{R}$, o triângulo se dilata, sendo a o fator de dilatação. Neste caso, as medidas do triângulo transformado são maiores do que as medidas do triângulo inicial;
2. Se $0 < a < 1$, o triângulo sofre uma contração, sendo a o fator de contração. Neste caso, as medidas do triângulo transformado são menores do que as medidas do triângulo inicial.

Nos dois casos o triângulo inicial e o transformado são semelhantes, isto é, os ângulos são preservados e as medidas dos lados do triângulo transformado são proporcionais às medidas dos correspondentes lados do triângulo inicial. É importante perceber que a dilatação (ou contração) se dá em relação à origem do plano complexo.

Exemplo: Sejam $z_1 = 1+1i$, $z_2 = 2+1i$, $z_3 = 1+2i$. Se $a = 2$, temos:

$$\begin{pmatrix} z_j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_j & 1 \end{pmatrix}, \; j = 1, 2, 3.$$

Então, $z_j' = f(z_j) = 2z_j$. Assim, $z_1' = 2+2i$, $z_2' = 4+2i$, $z_3' = 2+4i$.

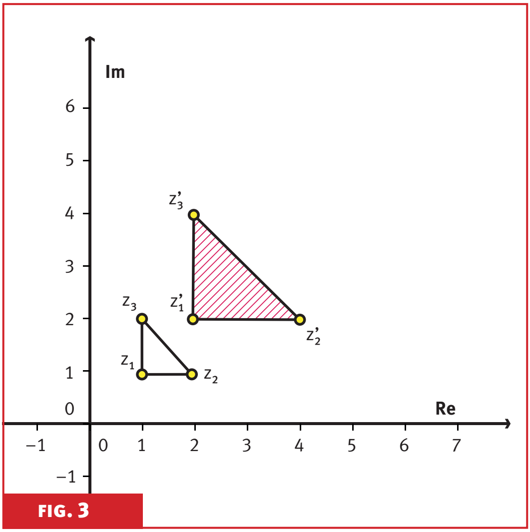


FIG. 3

Rotação

Para matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

com $d = \pm i$, esperamos que os alunos percebam visualmente que o movimento realizado é uma rotação de 90 graus em torno da origem, no sentido horário para $d = i$ e uma rotação de 90 graus em torno da origem, no sentido anti-horário para $d = -i$.

Também, pode ser observado que as medidas dos lados e as medidas dos ângulos são mantidas, isto é, o triângulo inicial e o transformado são congruentes. Pode ser proposto aos alunos que, utilizando um transferidor, meçam o ângulo de rotação.

Exemplo: Sejam $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 4 + i$, $z_3 = 2 + 2i$. Se $d = -i$, temos:

$$\begin{pmatrix} z_j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_j & -i \end{pmatrix}, \; j = 1, 2, 3.$$

Então,

$$z_j' = f(z_j) = \frac{z_j}{-i} = \frac{1}{-i} z_j = i z_j.$$

Assim, $z_1' = -1 + i$, $z_2' = -1 + 4i$, $z_3' = -2 + 2i$.

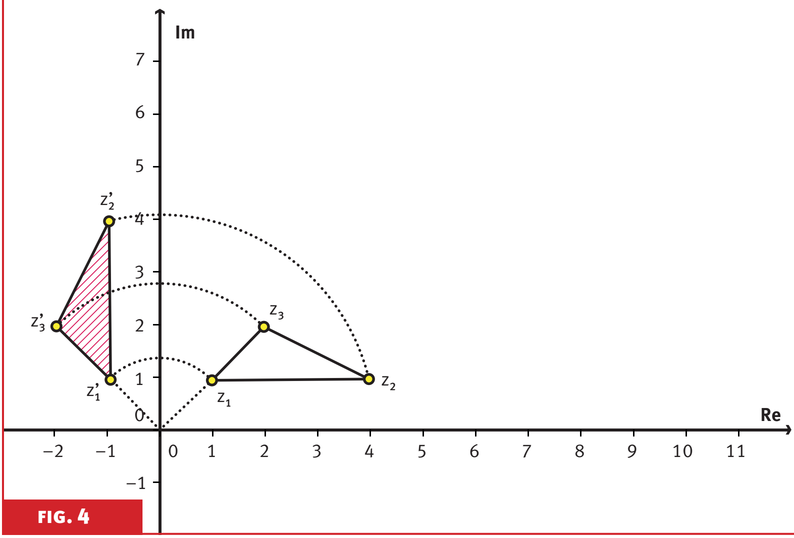


FIG. 4

Etapa 2 **Explicação das transformações e suas formas analíticas**

Se achar necessário, é possível fazer uma recordação das operações de números complexos e suas interpretações geométricas. Este conhecimento é necessário para a análise a ser feita nesta etapa e na seguinte. No Fechamento deste guia, apresentamos um desenvolvimento destes conceitos para facilitar.

Esta etapa tem como objetivo mostrar como encontrar a forma analítica da transformação correspondente a cada um dos tipos de matrizes da etapa 1. A seguir, a meta é analisar a forma analítica, usando as interpretações geométricas das operações de números complexos, para dizer se a transformação é uma translação, dilatação, contração ou rotação. Além disso, pode ser proposto aos alunos que comparem as conclusões obtidas na ETAPA 1 com as conclusões via análise das formas analíticas.

Agora, vamos analisar a relação entre cada tipo de matriz utilizada na ETAPA 1 e sua correspondente forma analítica, e, principalmente, o que a forma analítica pode nos dizer a respeito do tipo de transformação correspondente.

Não é demais lembrar que, dada uma matriz

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

para obter a forma analítica da correspondente transformação de Möbius f, devemos multiplicar a matriz linha $\begin{pmatrix} z & 1 \end{pmatrix}$ pela matriz

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

obtendo a matriz $\begin{pmatrix} az+b & cz+d \end{pmatrix}$, e depois dividir o primeiro elemento desta matriz pelo segundo elemento, chegando a

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Translação

A forma analítica da transformação f correspondente ao primeiro tipo de matriz da ETAPA 1, ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \text{com } b \in \mathbb{C},$$

é

$$f(z) = \frac{z+b}{1} = z+b.$$

Como b é um número complexo constante, pela interpretação geométrica da soma de números complexos, a transformação f leva cada número complexo z no seu transladado por b. Assim, a transformação correspondente é uma translação dada pelo vetor correspondente ao número complexo b.

Dilatação e contração

A transformação f correspondente à matriz do tipo

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com a uma constante real positiva, é

$$f(z) = \frac{az}{1} = az.$$

O número complexo $z = x + yi$ na forma polar é dado por

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

com $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Logo, $az = ar(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e, portanto, a transformação f leva cada número complexo z de módulo r e argumento θ no número complexo az de módulo ar e argumento θ. Ou seja, a transformação mantém a inclinação do vetor correspondente ao ponto z e o módulo é multiplicado por a.

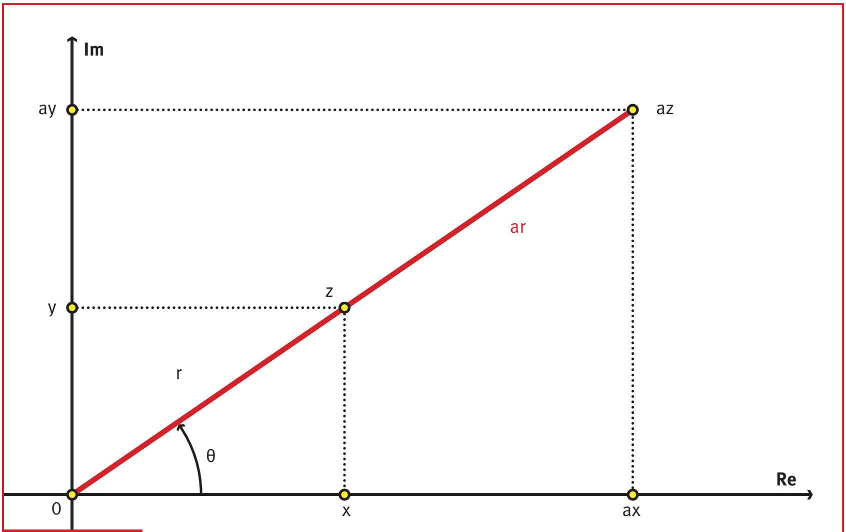


FIG. 5

Assim, se $a > 1$, a transformação é uma dilatação e, se $0 < a < 1$, a transformação é uma contração. Além disso, o fator de dilatação ou contração é a. Note que a dilatação (ou contração) é em relação à origem do plano complexo.

Rotação

Na ETAPA 1 foram investigadas as matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

com $d = \pm i$. A forma analítica da transformação f correspondente à matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{é } f(z) = \frac{z}{d}.$$

Se $d = -1$,

$$f(z) = \frac{z}{-i} = iz.$$

Como $i = \cos \pi/2 + i \operatorname{sen} \pi/2$, seu módulo é 1 e o argumento é $\frac{\pi}{2}$. Sendo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, pela interpretação geométrica do produto de números complexos, o produto iz tem módulo $1r$, ou seja, r, e argumento $\pi/2 + \theta$. Logo, a transformação f leva o ponto z, de módulo r e argumento θ, ao ponto iz, de módulo r e argumento $\pi/2 + \theta$. Com isto, concluímos que f é a rotação de $\pi/2$ no sentido anti-horário e centro na origem.

Se $d = i$,

$$f(z) = \frac{z}{i} = -i.$$

Como $-i = \cos 3\pi/2 + i \operatorname{sen} 3\pi/2$, seu módulo é 1 e o argumento é $3\pi/2$. Sendo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, pela interpretação geométrica do produto de números complexos, o produto $-iz$ tem módulo $1r$, ou seja, r, e argumento $3\pi/2 + \theta$. Logo, a transformação f leva o ponto z, de módulo r e argumento θ, ao ponto $-iz$, de módulo r e argumento $3\pi/2 + \theta$. Com isto, concluímos que f é a rotação de $3\pi/2$ no sentido anti-horário e centro na origem, que é igual à rotação de $\pi/2$ no sentido horário e centro na origem.

Etapa 3 **Troca de matrizes**

Lembremos que uma transformação de Möbius é definida por

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},$$

com a, b, c, d números complexos e $ad-bc\neq 0$. O objetivo do experimento é investigar as transformações com $c=0$, o que significa que devemos considerar números complexos a, b, d com $ad\neq 0$. Assim, nesta etapa são consideradas matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix},$$

com a, b, d números complexos, sendo a e d não nulos.

Esperamos que os alunos, ao receberem uma matriz do tipo

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix},$$

tenham a iniciativa de encontrar a forma analítica da transformação f correspondente. A seguir, utilizando a forma analítica e a interpretação geométrica das operações de números complexos, consigam dizer quais os movimentos envolvidos na transformação.

Caso os alunos tenham dificuldade, oriente-os a encontrar a forma analítica e a interpretá-la.

Forma analítica da transformação associada à matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix}$

A forma analítica da transformação f correspondente a matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix},$$

com d um número complexo não nulo, é

$$f(z)=\frac{az+b}{d}=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}.$$

Esta transformação multiplica um número complexo qualquer z pelo número complexo a/d e, ao resultado, o número complexo b/d é somado. Considerando $r = |z|$ e θ o argumento do número complexo

$$z,\ r_1 = \left|\frac{d}{a}\right| \text{ e } \theta_1$$

o argumento do número complexo a/d, pela interpretação geométrica do produto de números complexos, o produto $a/d\ z$ é o número complexo de módulo $r_1 r$ e argumento $\theta_1 + \theta$, como na figura. Assim, este produto é a composição da rotação de ângulo θ_1 e a dilatação de fator

$$r_1 = \left|\frac{d}{a}\right|.$$

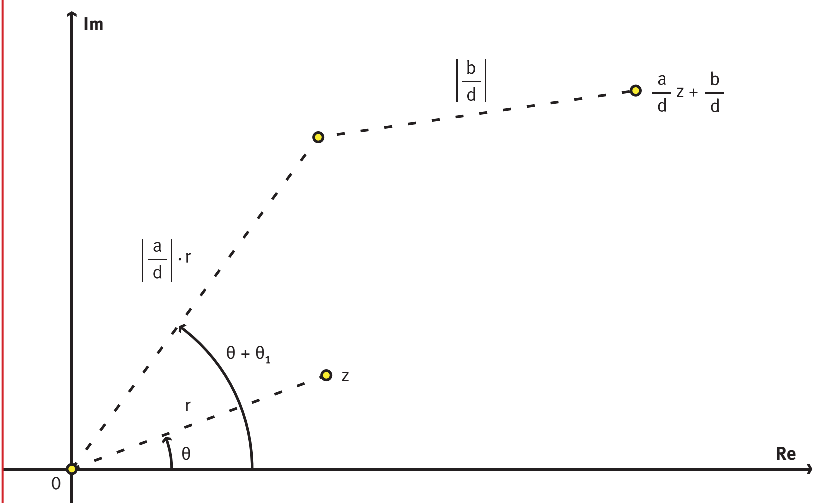


FIG. 6

Agora, pela interpretação geométrica da soma de números complexos, a soma

$$\frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

corresponde a transladar o número complexo $a/d\ z$ pelo vetor correspondente ao complexo b/d.

- Se $b = 0$, temos

$$\frac{b}{d} = 0$$

e três possibilidades:

1. se

$$\left|\frac{a}{d}\right| > 1,$$

a transformação é a composição de uma rotação e de uma dilatação, podendo ser simplesmente uma dilatação se a/d for um número real positivo;

2. se

$$0 < \left|\frac{a}{d}\right| < 1,$$

a transformação é a composição de uma rotação e de uma contração, podendo ser simplesmente uma contração se a/d for um número real positivo;

3. se

$$\left|\frac{a}{d}\right| = 1,$$

a transformação é uma rotação, podendo ser a identidade se, também, a/d for igual a 1.

- Se $b \neq 0$, temos

$$\frac{b}{d} \neq 0$$

e três possibilidades:

1. se

$$\left|\frac{a}{d}\right| > 1,$$

a transformação é a composição de uma rotação, uma dilatação e uma translação, podendo ser a composição de uma dilatação e uma translação se a/d for um número real positivo;

2. se

$$0 < \left|\frac{a}{d}\right| < 1,$$

a transformação é a composição de uma rotação, uma contração e de uma translação, podendo ser a composição de uma contração e uma translação se a/d for um número real positivo;

3. se

$$\left|\frac{a}{d}\right| = 1,$$

a transformação é a composição de uma rotação e de uma translação. E, se também a/d for igual a 1, a transformação é simplesmente uma translação.

Exemplo: Seja a matriz

$$\begin{pmatrix} -2+6i & 0 \\ 6+8i & 1+i \end{pmatrix}.$$

Neste caso, $a = -2+6i$, $b = 6+8i$ e $d = 1+i$. Note que $ad \neq 0$. Primeiro vamos visualizar o efeito da transformação f associada a esta matriz em um triângulo e, em seguida, vamos encontrar e analisar a forma analítica da transformação f correspondente.

Sejam $z_1 = 1+i$, $z_2 = 3+i$ e $z_3 = 1+2i$. Temos:

$$\begin{pmatrix} z_j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2+6i & 0 \\ 6+8i & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2+6i)z_j + 6+8i & 1+i \end{pmatrix},\ j = 1, 2, 3.$$

Então,

$$z_j' = f(z_j) = \frac{(-2+6i)z_j + 6+8i}{1+i}.$$

Assim, $z_1' = 5+7_i$, $z_2' = 9+15i$, $z_3' = 1+9i$.

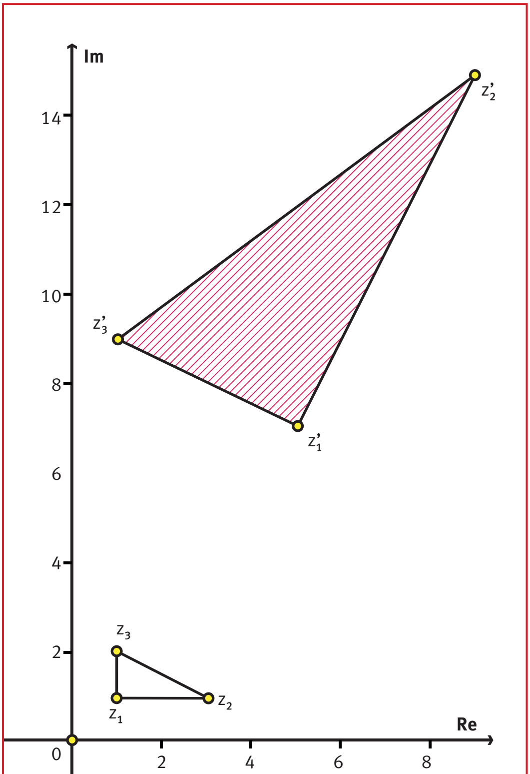


FIG. 7

Visualizando o triângulo determinado pelos vértices $z_1 = 1+i, z_2 = 3+i$, $z_3 = 1+2i$, e o triângulo transformado determinado pelos vértices $z_1' = 5+7i$, $z_2' = 9+15i$, $z_3' = 1+9i$, podemos perceber facilmente que houve pelo menos uma dilatação e uma rotação. Para ver se houve mais algum movimento, ou se bastam estes dois para transformar um no outro, vamos analisar a forma analítica da transformação.

A forma analítica da transformação é

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \frac{-2+61}{1+i}z + \frac{6+8i}{1+i} = (2+4i)z + (7+i).$$

Logo,

$$\frac{a}{d} = 2+4i \text{ e } \frac{b}{d} = 7+i.$$

Pela interpretação geométrica do produto de números complexos, o produto

$$\frac{a}{d}z = (2+4i)z$$

é a composição da rotação de ângulo $\theta_1 = \arg(2+4i)$ e a dilatação de fator

$$r_1 = \left|\frac{a}{d}\right| = |2+4i| = 2\sqrt{5}.$$

Agora, a soma

$$\frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = (2+4i)z + (7+i)$$

corresponde a transladar o número complexo

$$\frac{a}{d}z = (2+4i)z$$

pelo vetor correspondente ao complexo

$$\frac{b}{d} = 7+i,$$

ou seja, transladar na direção e sentido do vetor correspondente a $7+i$ e com deslocamento igual a

$$\left|\frac{b}{d}\right| = |7+i| = 5\sqrt{2}.$$

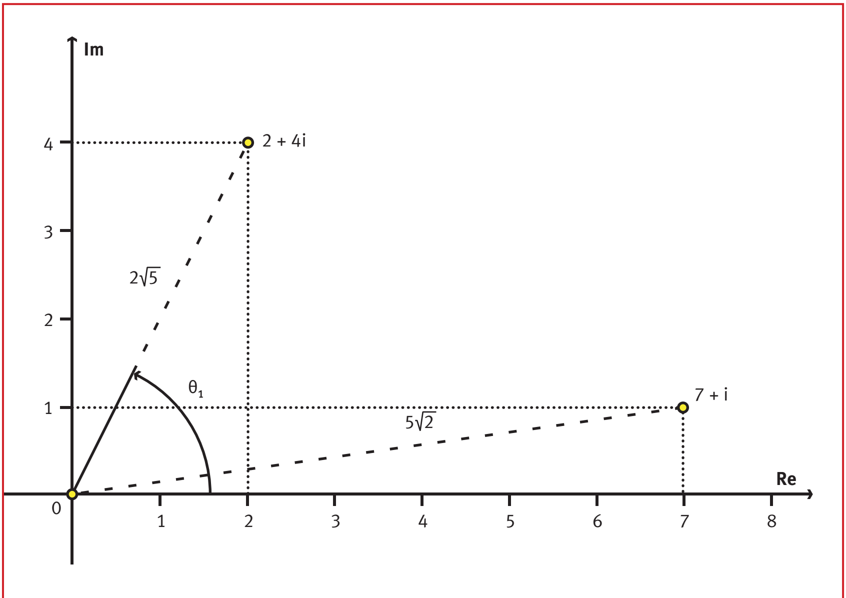

Im
4
3
2
1
0
2 + 4i
2√5
θ1
7 + i
5√2
Re
1
2
3
4
5
6
7
8

FIG. 8

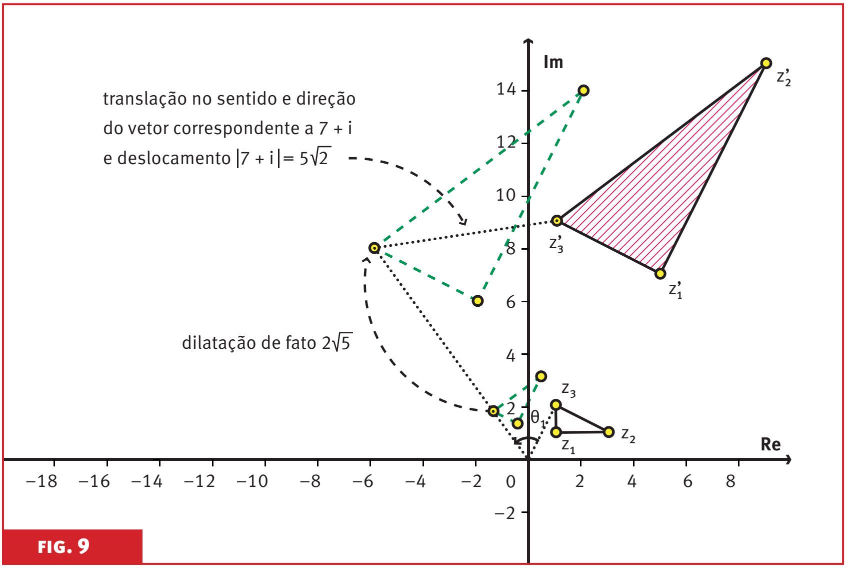

translação no sentido e direção
do vetor correspondente a 7 + i
e deslocamento |7 + i|= 5√2
dilatação de fato 2√5
Im
14
12
10
8
6
4
2
−2
z'2
z'3
z'1
z3
z2
z1
θ1
Re
−18 −16 −14 −12 −10 −8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8

FIG. 9

Portanto, a transformação f correspondente à matriz

$$\begin{pmatrix} -2+6i & 0 \\ 6+8i & 1+1 \end{pmatrix}$$

é a composição de uma rotação, uma dilatação e uma translação.

Fechamento

A seguir, desenvolveremos alguns conceitos necessários para a realização do experimento.

Números Complexos

Em um plano com um sistema de coordenadas, um número complexo pode ser representado tanto pelo ponto $P(x, y)$ como pelo vetor com ponto inicial na origem dos eixos coordenados e ponto final em P. O plano em que os números complexos são representados é chamado *plano complexo* ou *plano de Argand-Gauss*.

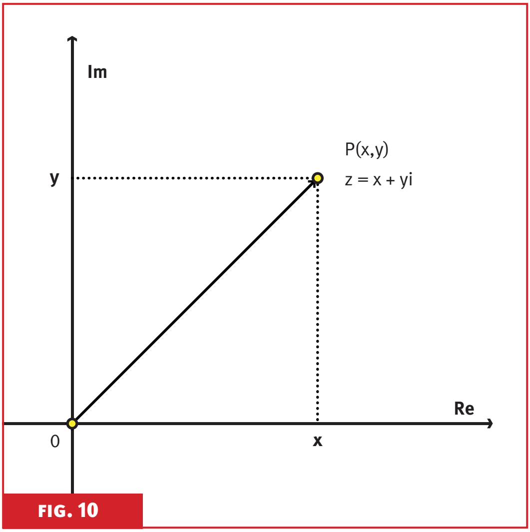


FIG. 10

A soma de números complexos

Considere os números complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$. A soma $z_1 + z_2$ dos números complexos z_1 e z_2 é definida por

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Interpretação geométrica da soma e da diferença de números complexos

De acordo com a definição, a soma $z_1 + z_2$ dos números complexos z_1 e z_2 corresponde ao ponto $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Este ponto, por sua vez, corresponde ao vetor cujas componentes são as coordenadas do ponto. Assim, o número $z_1 + z_2$ é representado pela soma dos vetores que representam z_1 e z_2, como mostra a figura.

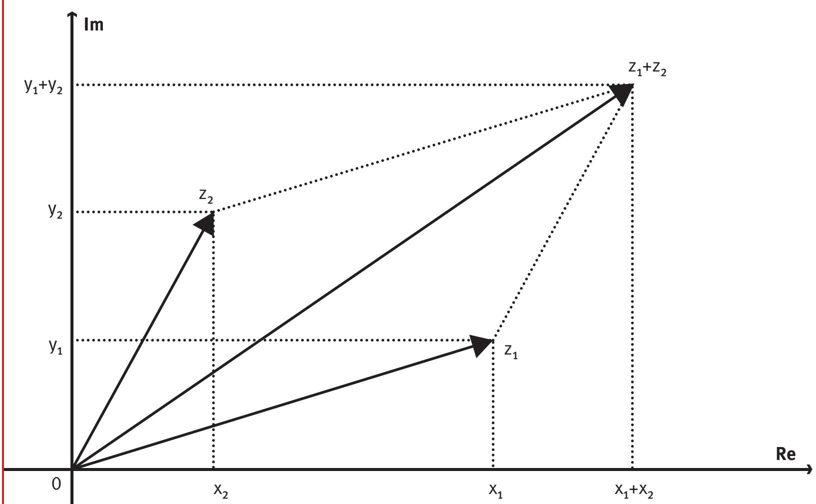


FIG. 11

Para obter a diferença $z_1 - z_2$, podemos fazer: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Assim, o número $z_1 - z_2$ é representado pela soma dos vetores que representam z_1 e $(-z_2)$, como mostra a figura.

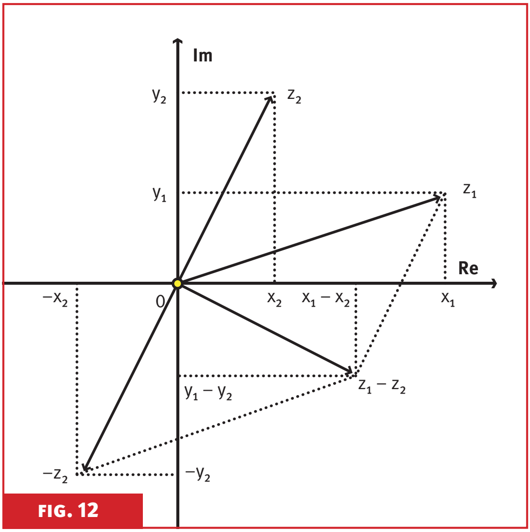


FIG. 12

O produto e o quociente de números complexos

A seguir, vamos apresentar as expressões para as operações produto e quociente de números complexos na forma polar e as interpretações geométricas dessas operações.

Sejam r e θ as coordenadas polares do ponto representando z, como na figura, onde $r \geqslant 0$.

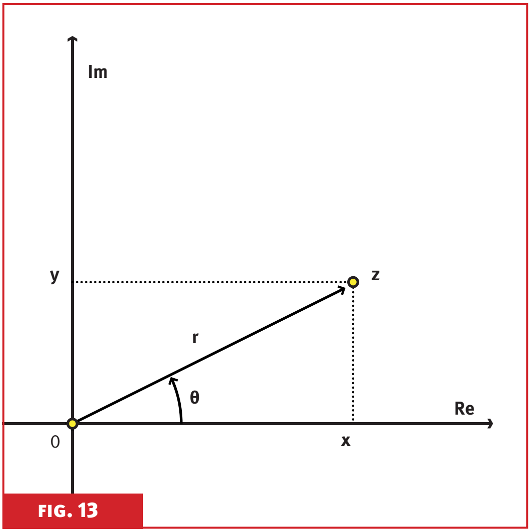


FIG. 13

Então $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, e o número complexo z pode ser escrito na forma polar por $z = r(\cos\theta = i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, com $r \geqslant 0$. Assim, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e é chamado o *módulo* ou *valor absoluto* do número complexo z. Também, o módulo de z é denotado por $|z|$, assim, $r = |z|$. O ângulo θ é chamado *argumento* de z e é denotado por $\arg(z)$.

Expressão trigonométrica para o produto de números complexos
Para encontrar a expressão do produto dos números complexos

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) \text{ e } z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$$

na forma polar, fazemos:

$$z_1 \cdot z_2 =$$

$$= r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$$

$$= r_1 \cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + i(\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)]$$

$$= r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1+\theta_2)]$$

Produto de números complexos

A expressão para o produto dos números complexos

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) \text{ e } z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$$

é

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1+\theta_2)].$$

Interpretação geométrica do produto de números complexos
Pela expressão para o produto obtemos

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2| \text{ e } \arg(z_1\cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2),$$

isto é, o módulo do produto é o produto dos módulos e o argumento do produto é a soma dos argumentos. Assim, a representação geométrica do produto é o vetor de comprimento igual ao produto dos comprimentos dos vetores que representam z_1 e z_2 e cujo ângulo de inclinação é a soma dos ângulos θ_1 e θ_2, conforme figura.

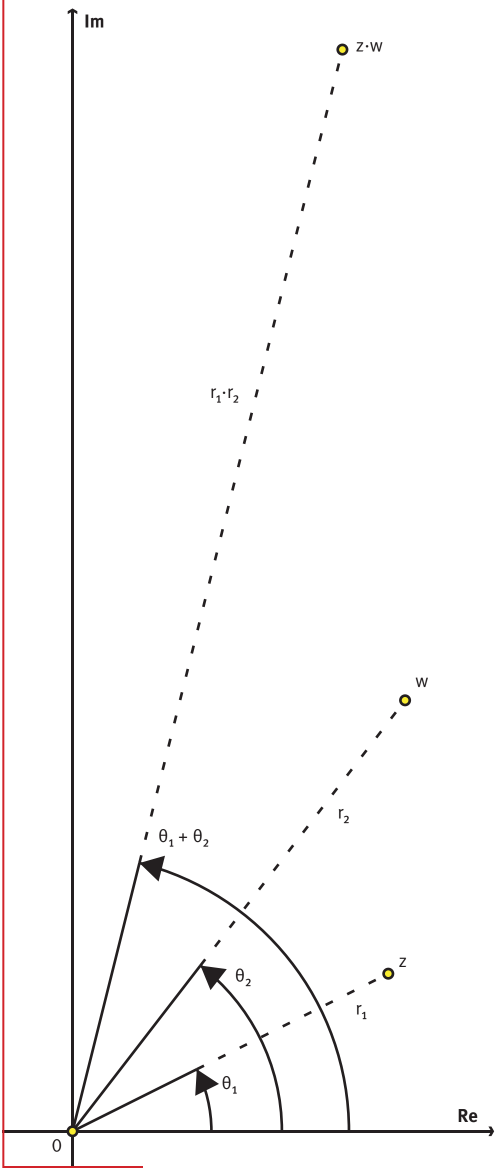


FIG. 14

Expressão trigonométrica para o quociente de números complexos
Para encontrar a expressão do quociente dos números complexos

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) \text{ e } z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2),$$

fazemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)r_2(\cos\theta_2 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)r_2(\cos\theta_2 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1 - \theta_2)]}{r_2 \cdot r_2[\cos(\theta_2 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_2 - \theta_2)]}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1 - \theta_2)]$$

Quociente de números complexos

A expressão para o quociente dos números complexos

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) \text{ e } z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2),$$

se $r_2 \neq 0$, é

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1 - \theta_2)].$$

Interpretação geométrica do quociente de números complexos
Pela expressão para o quociente obtemos

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

se $|z_2| \neq 0$, isto é, o módulo do quociente é o quociente dos módulos, e

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

Assim, a representação geométrica do quociente é o vetor de comprimento igual ao quociente dos comprimentos dos vetores que representam

z_1 e z_2 e cujo ângulo de inclinação é a diferença dos ângulos θ_1 e θ_2, conforme figura.

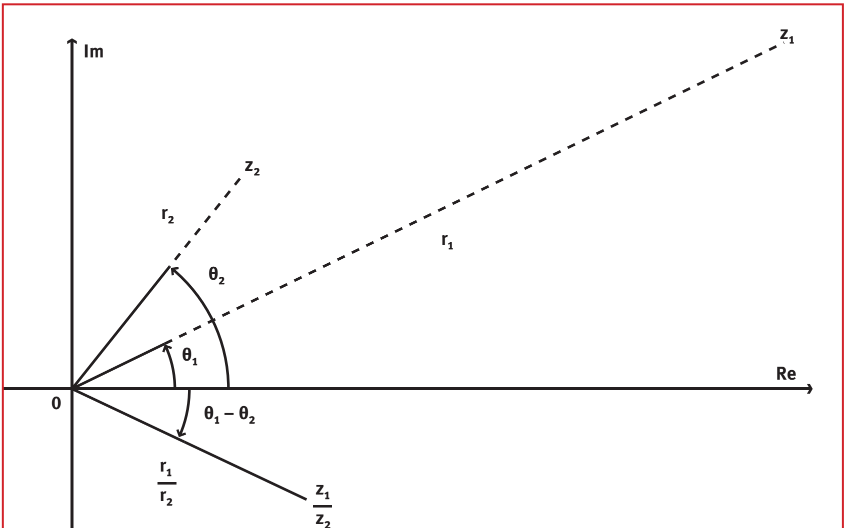


FIG. 15

Como calcular o quociente de números complexos

O conjugado de um número complexo $z = x + yi$ é o número complexo $z = x - yi$. Para calcular a divisão de dois números complexos, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Por exemplo,

$$\frac{11+2i}{2-i} = \frac{(11+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{20+15i}{5} = 4+3i\,.$$

Caso Geral da Transformação de Möbius

Agora, analisaremos o caso geral, ou seja, quando a matriz associada à transformação f é do tipo

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

com a, b, c, d números complexos quaisquer satisfazendo $ad - bc \neq 0$.

A forma analítica da transformação é

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

A expressão de f pode ser reescrita da seguinte forma:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az + \dfrac{ad}{c} + \dfrac{bc-ad}{c}}{cz+d} =$$

$$= \frac{\dfrac{a}{c}(cz+d) + \dfrac{bc-ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{c\left(z + \dfrac{d}{c}\right)}$$

Então,

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \dfrac{d}{c}}$$

Assim, se $c \neq 0$, para um número complexo qualquer z, com $z \neq -\dfrac{d}{c}$, o valor $f(z)$ pode ser obtido seguindo o diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "\textit{soma } \frac{d}{c}"] \arrow[ddrr, "f"'] & z+\frac{d}{c} \arrow[r, "\textit{inverte}"] & \dfrac{1}{z+\frac{d}{c}} \arrow[d, "\textit{multiplica por } \frac{bc-ad}{c^2}"] \\
 & & \dfrac{bc-ad}{c^2}\cdot\dfrac{1}{z+\frac{d}{c}} \arrow[d, "\textit{soma } \frac{a}{c}"] \\
 & & f(z)=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c^2}\cdot\dfrac{1}{z+\frac{d}{c}}
\end{tikzcd}
$$

FIG. 16

Logo, a transformação f pode ser obtida pela composição:

- da translação $T_1(z) = z + \dfrac{d}{c}$;
- da inversão $I(z) = \dfrac{1}{z}$;
- da rotação e dilatação (ou contração) em relação à origem $D(z) = \dfrac{bc-ad}{c^2}\cdot z$;
- e da translação $T_2(z) = \dfrac{a}{c} + z$.

Enfim,

$$(T_2 \circ D \circ I \circ T_1)(z) = (T_2 \circ D \circ I)\left(z + \frac{d}{c}\right) = (T_2 \circ D)\left(\frac{1}{z + \dfrac{d}{c}}\right) =$$

$$= T_2\left(\frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \dfrac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \dfrac{d}{c}} = \frac{az + b}{cz + d} = f(z).$$

Portanto, uma transformação de Möbius qualquer pode ser expressa como uma composição de transformações mais simples, a saber: translações, rotação, dilatação (ou contração) e inversão.

Observação

A Transformação de Möbius é definida por

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + b},$$

com a, b, c, d números complexos e $ad - bc \neq 0$. A condição $ad - bc \neq 0$ é necessária para garantir que f não seja uma função constante. Para justificar este fato, primeiro é preciso notar que o quociente

$$\frac{az + b}{cz + b}$$

só faz sentido e define uma função, se c e d não forem simultaneamente iguais a zero. Assim, se $ad - bc = 0$, ou seja, $ad = bc$, temos duas possibilidades para a função f definida por

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + b}:$$

1. Se $c \neq 0$, então $b = \dfrac{ad}{c}$, o que implica que

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + \dfrac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{\dfrac{a}{c}(cz + d)}{cz + d} = \frac{a}{c}.$$

Logo, f é constante.

2. Se $c = 0$, então d deve ser não nulo e, como $ad = bc$, concluímos que $a = 0$. Assim,

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{b}{d}.$$

Logo, f é constante.

Enfim, quando $ad - bc = 0$, f é constante, não sendo, portanto, uma transformação. Este caso é chamado *singular*.

Circunferências e Transformações de Möbius
É fácil perceber que a translação, rotação, dilatação e contração transformam uma circunferência em uma circunferência. Por sua vez, a inversão

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

transforma uma circunferência em uma circunferência ou em uma reta, assim como transforma uma reta em uma reta ou em uma circunferência, o que já não é fácil de perceber visualmente levando em consideração o experimento desenvolvido. Logo, como uma Transformação de Möbius pode ser expressa por meio de uma composição de translações, rotação, dilatação (ou contração) e inversão, então ela transforma circunferências em circunferências ou retas, assim como transforma retas em retas ou circunferências, o que constitui uma de suas principais propriedades.

Ângulos e Transformações de Möbius
É fácil perceber que a translação, rotação, dilatação e contração transformam um ângulo em um ângulo congruente, ou seja, preserva ângulos.

Por sua vez, a inversão

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

pode transformar, por exemplo, um ângulo em dois arcos de circunferências, como mostra a figura.

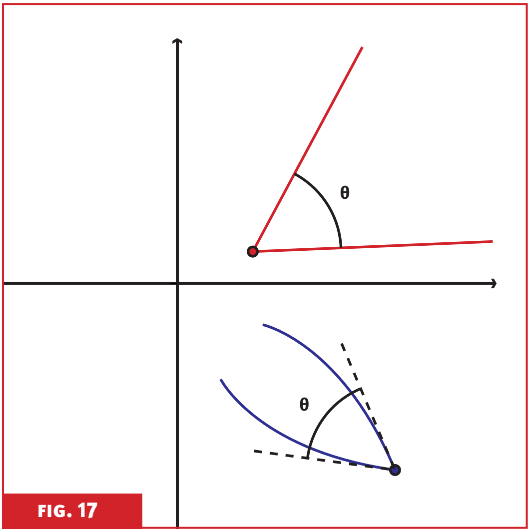


FIG. 17

Definindo o ângulo entre esses arcos como sendo o ângulo entre suas tangentes no ponto de interseção dos arcos, pode ser provado que o ângulo inicial e o ângulo entre os arcos são congruentes.

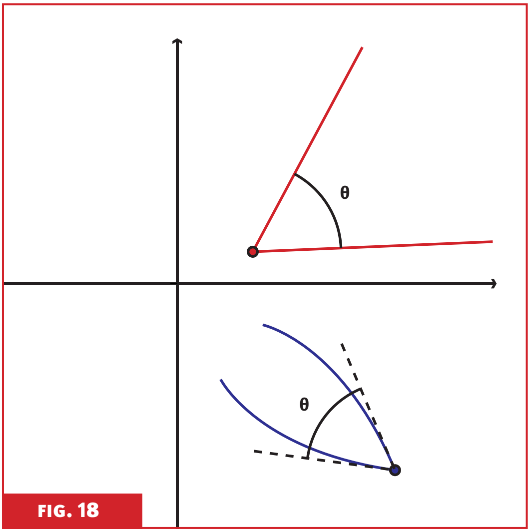


FIG. 18

Neste sentido, dizemos que a inversão também preserva ângulos. E, assim, uma Transformação de Möbius preserva ângulos ou, de outra forma, dizemos que é uma Transformação Conforme.

Variações

Como uma variação deste experimento, é possível propor aos alunos as seguintes questões:

- Considerando matrizes A, B e C, associadas à transformação de translação, de rotação e de translação, respectivamente, analise se as transformações correspondentes aos produtos ABC e ACB são iguais.
- Considerando matrizes A, B e C, associadas à transformação de rotação, de translação e de rotação, respectivamente, analise se as transformações correspondentes aos produtos ABC e ACB são iguais.
- Considerando matrizes A e B, associadas à transformação de translação e de rotação, respectivamente, analise se as transformações correspondentes aos produtos AB e BA são iguais.

Proponha aos alunos que mostrem que a translação, dilatação, contração e rotação transformam retas em retas, circunferências em circunferências e que preservam ângulos.

Mostre que $x^3 + px + q$, com p e q constantes, se reduz a uma fração racional fazendo a substituição

$$x = \frac{az+b}{cz+d},$$

ou seja, usando uma Transformação de Möbius.

Comentário: a substituição indicada nesta questão, utilizando a Transformação de Möbius

$$x = f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

permite encontrar um algoritmo que fornece as soluções da equação de terceiro grau $x^3 + px + q = 0$. Este é um exemplo em que a Transformação de Möbius possibilita transformar um problema em outro mais manipulável. Para uma leitura sobre o assunto, veja [Santos].

Bibliografia

J. C. Santos, **Transformadas de Möbius e Equações do Terceiro Grau**, Bol. Soc. Por. Mat., 2005;

E. Capelas de Oliveira e W. A. Rodrigues Jr., **Funções Analíticas com Aplicações**, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006;

G. Ávila, **Variáveis Complexas e Aplicações**, 3ª edição, editora LTC, Rio de Janeiro, 2000;

L. Adauto da J. Medeiros, **Introdução às Funções Complexas**, Editora McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1972;

R. P. Burns, **Groups: A Path to Geometry**, Cambridge University, Cambridge, 1987;

R. P. Pazos, **Visualizando Funções Complexas**, III Congresso Internacional de Ensino de Matemática, Canoas (RS), 2005;

C. Carathéodory, **Conformal Representation**, Dover Publications, Inc., New York, 1998.

E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner, A. C. Morgado. **A Matemática do Ensino Médio**, Vol. 3, Coleção do Professor de Matemática, (3a Edição). Rio de Janeiro: SBM, 2000.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autores
Claudina Izepe Rodrigues,
Edmundo Capelas de Oliveira,
Eliane Quelho Frota Rezende e
Maria Lúcia Bontorim de Queiroz

Revisores
Matemática
Antonio Carlos do Patricínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira da Costa
Vice-Reitor e Pró-Reitor de Pós-Graduação
Edgar Salvadori De Decca

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (imecc – unicamp)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal