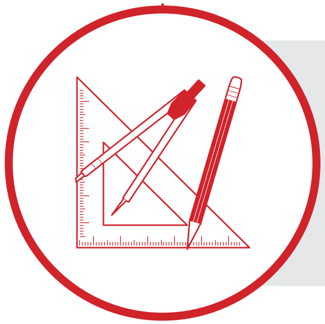
Matemática Multimídia

NÚMEROS E FUNÇÕES

GUIA DO PROFESSOR



Experimento

Otimização da cerca

Objetivos da unidade

1. Resolver um problema de otimização através do estudo de uma função quadrática.
2. Estudar as propriedades de uma função quadrática.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Otimização da cerca

Guia do professor

Sinopse

O experimento é dividido em duas etapas, nas quais os alunos trabalharão em duplas para resolver um problema de otimização através do estudo de uma função quadrática. Na primeira etapa, eles tentarão achar a maior área possível para um cercado *retangular*. Na segunda, com base na solução anterior, tentarão resolver uma variação do problema.

Conteúdos

Função Quadrática: Gráfico, Aplicações e Otimizações Simples.

Objetivos

1. Resolver um problema de otimização através do estudo de uma função quadrática.
2. Estudar as propriedades de uma função quadrática.

Duração

Uma aula simples.

Matemática Multimídia

Introdução

A utilização racional de recursos, principalmente dos naturais, é uma das preocupações que aflige a humanidade no momento atual. A consciência de que esses recursos são finitos e de que existe um limite para a produção de alguns materiais gera a necessidade do desenvolvimento de estratégias que permitam um melhor aproveitamento desse tipo de material.

Em muitas atividades, usamos somente nossa intuição para obter esse melhor aproveitamento, o que nem sempre é a melhor opção. Uma excelente ferramenta que pode nos auxiliar nestes momentos é a matemática. Dentre o arcabouço de soluções que a disciplina nos oferece, encontramos a possibilidade de descrever situações reais usando funções.

Neste experimento, buscaremos *otimizar áreas de cercados*. Otimizar a área do cercado é encontrar a maior área que poderá ser delimitada por cercados de perímetro constante. A variação das medidas de um retângulo provoca a variação da área do retângulo, dada por uma função quadrática. Este experimento permite a visualização dessa variação, criando a oportunidade para que o professor explore elementos e propriedades da função.

O experimento

Comentários iniciais

Neste experimento, os alunos irão explorar superfícies de diferentes tamanhos delimitadas por figuras na forma retangular. A questão que se coloca é a seguinte:

Formulação do problema

Com uma quantidade fixa de material, qual a maior área possível que podemos obter para um cercado *retangular*?.

Essa questão serve de ponto de partida para a definição de função quadrática, bem como para a aplicação de conceitos a ela relacionados, dando significado a essa ferramenta da matemática.

Etapa 1 Cercados retangulares

Construção do cercado

Nesta etapa é proposto que os alunos construam seis retângulos utilizando pedaços de barbante com o mesmo comprimento, o que garante que o perímetro dessas figuras será previamente fixado. Procurando permitir uma melhor visualização do experimento, solicitamos que os alunos colem os retângulos por eles criados numa folha de papel, numerados de 1 a 6.

Para que se possa aprofundar a discussão, sugerimos que os tamanhos dos barbantes sejam diferentes para grupos diferentes, variando entre 20 cm e 30 cm. Essa variação não afeta o princípio geral da atividade, visto que o comprimento de todos os barbantes em cada grupo deverá ser o mesmo. Além disso, essa desigualdade de tamanhos permite a obtenção de expressões diferentes para descrever o mesmo evento.

Obtenção dos dados

Para obter os dados, os alunos são solicitados a construir retângulos, medir seus lados e determinar a área da figura obtida. A percepção de que a área está relacionada com a medida dos lados é fundamental para a compreensão da atividade e cria as condições para que se defina a expressão algébrica que relaciona essas grandezas. O fato de a figura trabalhada ser um retângulo facilita a obtenção dessa expressão que, na medida do possível, deverá ser obtida pelos alunos sem interferência direta do professor. O auxílio aos alunos na obtenção da função só deverá ocorrer caso nenhum dos grupos seja capaz de fazê-lo.

Sugestão ao professor

Estimule o grupo de alunos que conseguir obter a expressão a expor para seus colegas o raciocínio desenvolvido.

Para padronizar a linguagem, convencionamos que as medidas da largura e comprimento do retângulo devem ser representadas por L_i e C_i, respectivamente, e a área por A_i, com $1 \leq i \leq 6$, onde i representa a numeração dos retângulos nessa etapa. A representação dos pontos (L_i, A_i) e (C_i, A_i) no plano cartesiano que se encontra no ANEXO DA FOLHA DO ALUNO permite melhor percepção da variação da grandeza área em relação à grandeza comprimento de um dos lados do retângulo, consciência da simetria dos pontos (L_i, A_i) e (C_i, A_i) em relação ao eixo da parábola e compreensão da existência de um valor máximo para a área.

Os alunos devem também obter a expressão da função área considerando como variável independente a medida de um dos lados dos retângulos de perímetro constante e marcar diversos pontos pertencentes ao gráfico dessa função no mesmo plano cartesiano utilizado anteriormente.

Como os diversos grupos receberão barbantes de comprimentos diferentes, as expressões obtidas para as funções áreas dos retângulos também serão diferentes.

Esperamos que o aluno tenha uma percepção da concavidade do gráfico da função, dos pontos em que o gráfico intersecciona o eixo x, do crescimento/decrescimento da função e, consequentemente, encontrem o maior valor da área.

O professor deve dizer aos alunos que podemos provar que, de fato, o gráfico da função área é parte de uma curva chamada parábola cujo estudo poderá ser feito após o FECHAMENTO do experimento.

Etapa 2 **Variação – cercado apoiado em um muro**

Esta etapa da atividade é uma variação da atividade anterior. A questão agora proposta é:

Formulação do problema

Com uma quantidade fixa de material, qual a maior área que posso obter para um cercado retangular que está apoiado em um muro.

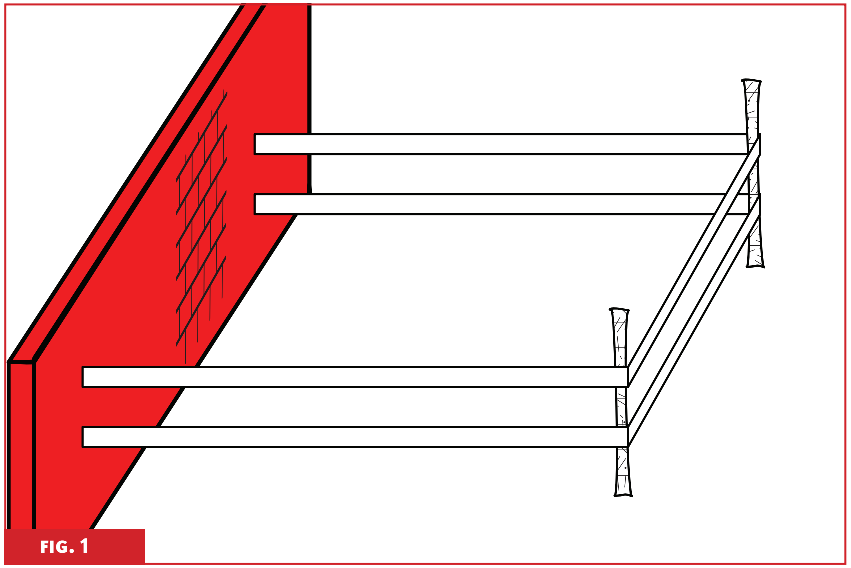


FIG. 1

Nessa versão do problema ocorre a variação do perímetro do retângulo, o qual terá como um dos lados parte do próprio muro. Essa variação permite a obtenção de novas funções quadráticas e o aprofundamento da discussão sobre a otimização da cerca.

A nova situação também gera uma função quadrática. De fato, $p = L_i + 2C_i$, onde p é o tamanho do barbante. Logo, $2C_i = p - L_i$ e, portanto,

$$C_i = \frac{(p - L_i)}{2}.$$

Como a área do retângulo é dada por $A_i = C_i \cdot L_i$, em função da largura temos

$$A = \frac{(p - L_i)}{2}(L_i), \text{ ou, } A = \left(\frac{p \cdot L_i}{2}\right) - \frac{{L_i}^2}{2}.$$

Essa expressão nos indica que se trata de uma função cuja representação gráfica é uma parábola com concavidade voltada para baixo e cujas raízes são 0 (zero) e p, como indica a figura abaixo.

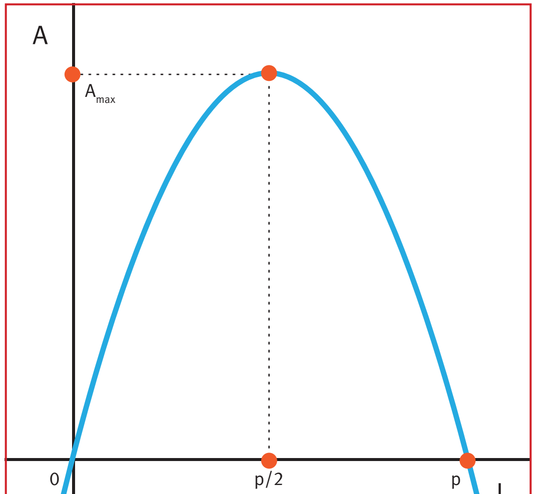


FIG. 2

Definições

1. Dizemos que o número $y_m \in Im(f)$ é o valor máximo da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_m \geq y$ para quaisquer $y_m \in Im(f)$. O número $x_m \in D(f)$ tal que $y_m = f(x_m)$ é chamado *ponto de máximo da função*.
2. Dizemos que o número $y_m \in Im(f)$ é o valor mínimo da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_m \leq y$ para quaisquer $y_m \in Im(f)$. O número $x_m \in D(f)$ tal que $y_m = f(x_m)$ é chamado *ponto de mínimo da função*.

Professor, não confunda ponto de máximo ou de mínimo de uma função, dado por x_m, com o vértice da parábola que constitui o gráfico da função, dado pelo par (x_v, y_v).

Solução da primeira etapa

Observando a representação gráfica obtida, percebemos que a curva que descreve o evento possui um eixo de simetria em $x = p/4$. Percebemos que, ao cruzar esse eixo, a função muda de comportamento, sendo crescente à esquerda e decrescente à direita. Isso nos permite afirmar que o ponto definido pela função sobre esse eixo é o valor máximo da função, ou seja, a área máxima A_{max}.

Tomando como base as definições acima, temos que o ponto máximo ocorre para $L_i = p/4$.

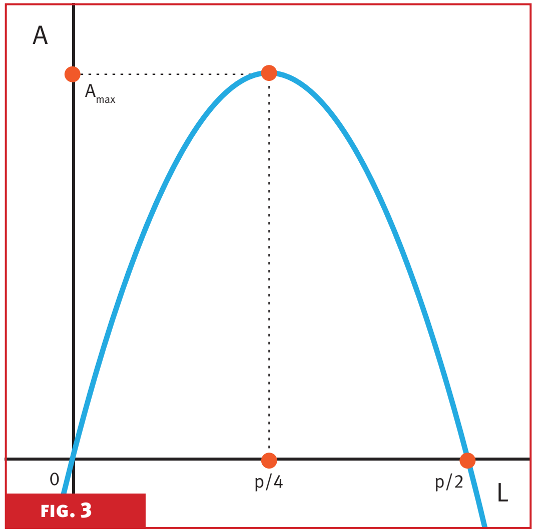


FIG. 3

Logo,

$$A_{max} = A\left(p/4\right) = \left(\frac{p}{2}\right) \cdot \left(\frac{p}{4}\right) - \left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{p^2}{8} - \frac{p^2}{16} = \frac{p^2}{16}.$$

Analisando com mais detalhes esse resultado, observamos que

$$A\left(p/4\right) = \frac{p^2}{16} = \left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

o que nos permite concluir que nessa situação a figura que otimiza a *área é a do quadrado*.

Solução da segunda etapa
Da mesma forma que na etapa anterior, a representação gráfica indica que a curva que descreve o evento possui um eixo de simetria em $L = p/2$. Logo, o ponto de máximo ocorre para $L_i = p/2$.

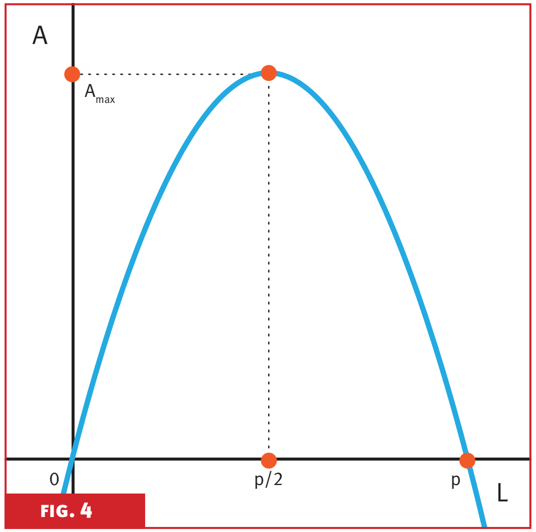


FIG. 4

Logo,

$$A_{max} = A\left(p/2\right) = \frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{8} = \frac{p^2}{8}.$$

Como, nessa versão, $p = L_i + 2C_i$, então, temos

$$C_i = \frac{(p - L_i)}{2}.$$

E, para $L_i = p/2$, temos

$$C_i = \frac{\left(p - \frac{p}{2}\right)}{2} = \frac{p}{4}.$$

Assim, o retângulo que otimiza a área tem dimensões $p/2$ e $p/4$, não sendo, portanto, um quadrado. Essa constatação permite o aprofundamento das discussões sobre o vértice da função quadrática.

Fechamento

O fechamento da atividade se dará com o professor destacando as propriedades relacionadas à representação gráfica de uma função quadrática.

Os dados coletados pelos alunos durante o experimento devem ser explorados destacando o crescimento das áreas até atingir um valor máximo e a simetria observada na representação em um plano cartesiano. Compare a representação com a expressão algébrica da função gerada na mesma atividade, evidenciando o fato de o coeficiente a ser negativo com a concavidade voltada para baixo, e informando que se a for positivo a concavidade estará voltada para cima. Essas informações nos auxiliarão nas definições dos conceitos relacionados ao ponto máximo ou mínimo, valor máximo ou mínimo de uma função e vértice da parábola que constitui o gráfico da função, dado por $V(x_v, y_v)$.

As fórmulas que permitem obter as coordenadas do vértice da parábola,

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a},$$

podem ser apresentadas logo a seguir. É muito importante demonstrar as referidas expressões, sendo possível a apresentação de duas versões para x_v:

Como caso particular de funções que apresentam duas raízes reais e distintas. Nesse caso, a abscissa do vértice é dada pelo ponto médio dessas raízes:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_v = \frac{\dfrac{(-b+\sqrt{\Delta})}{2a} + \dfrac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a}}{2}, \text{ portanto, } x_v = \left(\frac{-2b}{2a}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

Logo, $x_v = -\dfrac{b}{2a}$.

Quando o discriminante $\Delta = 0$, as raízes da função são reais e iguais e podem ser obtidas através da mesma expressão que determina a coordenada da abscissa. Essa observação cria condições para que se possa admitir a referida expressão como fórmula geral para a abscissa do vértice, x_v.

Caso geral

Sabemos que o gráfico da função quadrática é uma parábola com eixo de simetria dado pela reta $x = x_v$. Considerando dois pontos, $x_v - h$ e $x_v + h$, equidistantes de x_v, temos:

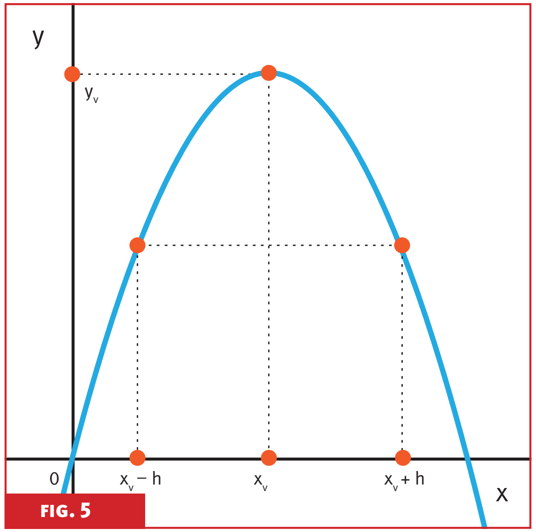


FIG. 5

Como $f(x) = ax^2 + bc + c$, temos

$$f(x_v - h) = a(x_v - h)^2 + b(x_v - h) + c$$

$$f(x_v - h) = a[(x_v)^2 - 2x_v h + h^2] + b(x_v - h) + c$$

$$f(x_v - h) = a(x_v)^2 - 2ax_v h + ah^2 + bx_v - bh + c$$

e

$$f(x_v+h)=a(x_v+h)^2+b(x_v+h)+c$$

$$f(x_v+h)=a[(x_v)^2+2x_vh+h^2]+b(x_v+h)+c$$

$$f(x_v+h)=a(x_v)^2+2ax_vh+ah^2+bx_v+bh+c$$

Como $f(x_v-h)=f(x_v+h)$, temos

$$a(x_v)^2-2ax_vh+ah^2+bx_v-bh+c=a(x_v)^2+2ax_vh+ah^2 \\ +bx_v+bh+c$$

o que equivale a

$$-2ax_vh-bh=2ax_vh+bh$$

ou a

$$(-2ax_v-b)h=(2ax_v+b)h.$$

Logo, temos

$$-2ax_v-b=2ax_v+b,$$

ou seja,

$$-2ax_v-b-2ax_v-b=0.$$

Multiplicando por (-1) e reduzindo os termos semelhantes, temos

$$4ax_v+2b=0$$

ou ainda

$$4ax_v=-2b.$$

Assim, $x_v=-\dfrac{2b}{4a}$, ou seja, $x_v=-\dfrac{b}{2a}$.

A demonstração da expressão para a ordenada do vértice, y_v, pode ser feita tomando como base o valor da função para $f(x_v)$.

Nesse caso: $y_v=f(x_v)=a(x_v)^2+b(x_v)+c$, logo, temos

$$y_v=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c,$$

ou ainda,

$$y_v=a\cdot\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{2a}+c$$

Assim,

$$y_v=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c\text{, ou seja, } y_v=\frac{b^2}{4a}-\frac{2b^2}{4a}+c.$$

Então,

$$y_v=\frac{-b^2+4ac}{4a}=\frac{-(b^2-4ac)}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}.$$

Portanto o vértice é dado por

$$V(x_v,y_v)=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right).$$

Uma abordagem mais rigorosa da função quadrática pode ser obtida a partir do estudo a seguir.

Definição

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é chamada *quadrática* se, para todo $x\in\mathbb{R}$, tem-se $f(x)=ax^2+bx+c$, onde a,b,c, são constantes, com $a\neq 0$.

A expressão, na forma canônica, é obtida com o completamento do quadrado:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x\right) + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Fazendo

$$m = -\frac{b}{2a} \text{ e } k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

obtemos $k = f(m)$.

Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $f(x) = a(x-m)^2 + k$ onde

$$m = -\frac{b}{2a} \text{ e } k = f(m).$$

Com a forma canônica $f(x) = a(x-m)^2 + k$ podemos concluir que, quando $a > 0$, o menor valor de $f(x)$ é $k = f(m)$ e, quando $a < 0$, o maior valor de $f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é $k = f(m)$, sendo que esses valores são assumidos em $x = m$.

O professor pode mostrar aos alunos que o gráfico de uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b, c são constantes e $a \neq 0$, é uma parábola com um eixo de simetria e apresenta a concavidade para cima se $a > 0$ ou a concavidade para baixo se $a < 0$. Além disso, o vértice da parábola é dado por $V = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$. Veja, por exemplo, o livro **Temas e Problemas**, p. 27 – 30.

Também podemos obter, a partir da forma canônica, as raízes ou zeros da função quadrática, isto é, as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. De fato, temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x-m)^2 = -k$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 = -\frac{k}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x - m = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = m \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Consideremos, inicialmente, o caso em que $b^2 - 4ac \geq 0$. Se chamarmos de x' e x'' as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, obtemos

$$\frac{x' + x''}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$= \frac{-2b}{4a} = -\frac{b}{2a} = m$$

Assim, a média aritmética entre x' e x'' nos dá o número em que a função quadrática admite uma valor extremo, isto é, um valor máximo ou mínimo. Isso significa que a média aritmética entre x' e x'' nos dá a abscissa do vértice da parábola que constitui o gráfico da função quadrática.

Consideremos agora o caso geral, sem a restrição $b^2 - 4ac \geq 0$.

O vértice $V = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ da parábola, gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, pertence à reta vertical $x = {}^{-b}/_{2a}$, eixo de simetria da parábola. Portanto, dois pontos (x', y) e (x'', y) da parábola têm a mesma ordenada, isto é, $f(x') = f(x'')$, se, e só se, ${}^{-b}/_{2a}$ for o ponto médio do intervalo cujas extremidades são x' e x'', ou seja,

$$\frac{-b}{2a} = \frac{x' + x''}{2}.$$

Assim, para obter a abscissa do vértice dessa parábola, basta encontrar o ponto médio do intervalo cujas extremidades são as abscissas de quaisquer dois pontos da parábola, simétricos em relação ao eixo da parábola.

Sugestões de leitura

No texto "*Por que as antenas são parabólicas*" encontrado em **Coleção Explorando o Ensino – Matemática**, p. 5 – 9, são apresentadas propriedades e aplicações da parábola que constitui o gráfico de uma função quadrática.

No artigo "*O Teorema Isoperimétrico e o Problema da Cerca*", de Flaviano B. P. Vieira, Laís B. Rodrigues, Edson Agustini, é demonstrado o Teorema Isoperimétrico: "*dentre todas as figuras planas de mesmo perímetro, o disco é a figura de maior área*". É apresentada, também, outra variação do problema de otimização da cerca: delimitar um quintal entre uma casa e um rio utilizando dois pedaços de cerca e usando a casa e o rio para essa delimitação.

Variações

Variações do mesmo experimento podem ser propostas, como, por exemplo, ao invés de usar apenas um muro, podemos utilizar um canto com uma parede de tamanho fixo que será totalmente aproveitada para delimitar o cercado. Essa variação acarretaria uma área inicial diferente de zero, implicando uma das raízes ser negativa e, nesse caso, a abscissa do ponto de máximo não coincide com o ponto médio entre as abscissas zero e a raiz positiva. Veja a representação gráfica da nova proposta:

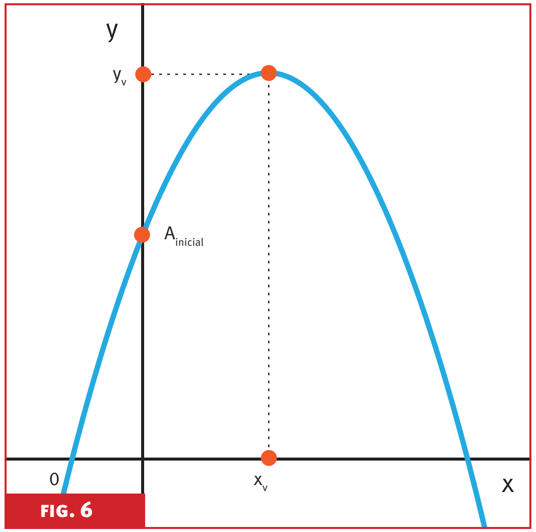


FIG. 6

Outra possibilidade é obter uma cerca com uma divisória apoiada em um muro. Veja o problema seguinte.

Um fazendeiro deseja construir uma cerca em sua propriedade para criar galinhas e patos. Para isso, aproveitará um muro já existente e cercará uma região retangular com dois compartimentos de medidas iguais, conforme a figura. Sabendo que o fazendeiro dispõe de L metros de tela, que serão totalmente utilizados, determine, em função de L,

1. o valor de x para que ele consiga cercar a maior área possível;
2. o valor da maior área possível.

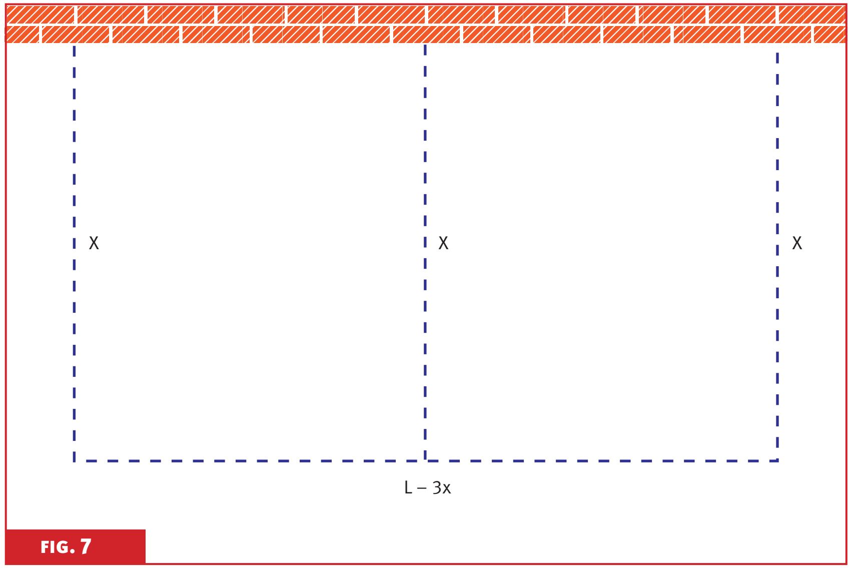


FIG. 7

Resolução
Denominando y a área cercada, temos:

$$y = x(L - 3x) \text{ ou, seja, } y = -3x^2 + Lx.$$

Raízes da função:

$$x(-3x + L) = 0, \text{ logo } x = 0 \text{ ou } x = \frac{L}{3}.$$

Assim, a área será máxima para $x = \dfrac{L}{6}$.

E o valor máximo de y será

$$y = -3\left(\frac{L}{6}\right)^2 + \frac{L^2}{6} = \frac{L^2}{6} - \frac{L^2}{12} = \frac{2L^2 - L^2}{12} = \frac{L^2}{12}$$

Bibliografia

Brasil. Secretaria de Educação Básica. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias: Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília: MEC/SEB, 2006. 135 p.; v. 2.

Brasil. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares dos Parâmetros Curriculares Nacionais; Ciências da Natureza, Matemáticas e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

Coleção Explorando o Ensino – Matemática. Brasília, 20004. v. 3. Disponível em *http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_3.pdf*. Acesso em 27 de março de 2009.

Lima, E. L. et al. **Temas e Problemas**. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2003. (Coleção do Professor de Matemática). Disponível em *http://www.ensinomedio.impa.br/materiais*. Acesso em 23 de março de 2009.

Lima, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 1998. v.1. (Coleção do Professor de Matemática).

Viera, F. B. P.; Rodrigues, L. B.; Augustini, E. **O Teorema Isoperimétrico e o Problema da Cerca**. FAMAT em Revista, n. 04, p. 141-152, abril, 2005.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autores
Eliane Quelho Frota Rezende,
Lourival Pereira Martins
e Wilson Roberto Rodrigues.

Revisores
Matemática
Antônio Carlos Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
José Tadeu Jorge
Vice-Reitor
Fernando Ferreira da Costa

Grupo Gestor de Projetos Educacionais (GGPE – UNICAMP)
Coordenador
Fernando Arantes
Gerente Executiva
Miriam C. C. de Oliveira

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL