

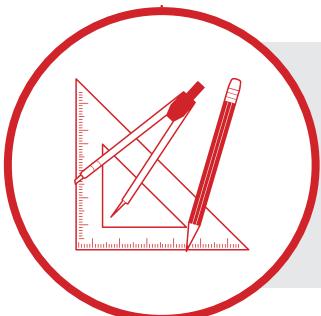


Matemática Multimídia

GEOMETRIA  
E MEDIDAS



## O EXPERIMENTO



# Experimento

Qual é a área do quadrilátero?

### Objetivos da unidade

1. Apresentar diferentes formas de se calcular ou aproximar a área de quadriláteros;
2. Analisar situações e fazer escolhas coerentes com a realidade.



**FNDE**

FUNDO NACIONAL  
DE DESENVOLVIMENTO  
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de  
Educação a Distância

Ministério da  
Ciência e Tecnologia

Ministério  
da Educação



LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons

# Qual é a área do quadrilátero?

## O EXPERIMENTO

### **Sinopse**

Neste experimento, serão apresentadas aos alunos diferentes formas para o cálculo, algumas vezes aproximado, da área de um quadrilátero. Em seguida, será pedido que construam um quadrilátero para ser estudado por alguns colegas de sala. Na etapa final, cada grupo fará aproximações para a área do polígono que recebeu, utilizando os métodos apresentados e discutirão qual forma foi a mais eficiente.

### **Conteúdos**

Geometria Plana, Áreas e Perímetros.

### **Objetivos**

1. Apresentar diferentes formas de se calcular ou aproximar a área de quadriláteros;
2. Analisar situações e fazer escolhas coerentes com a realidade.

### **Duração**

Uma aula dupla.

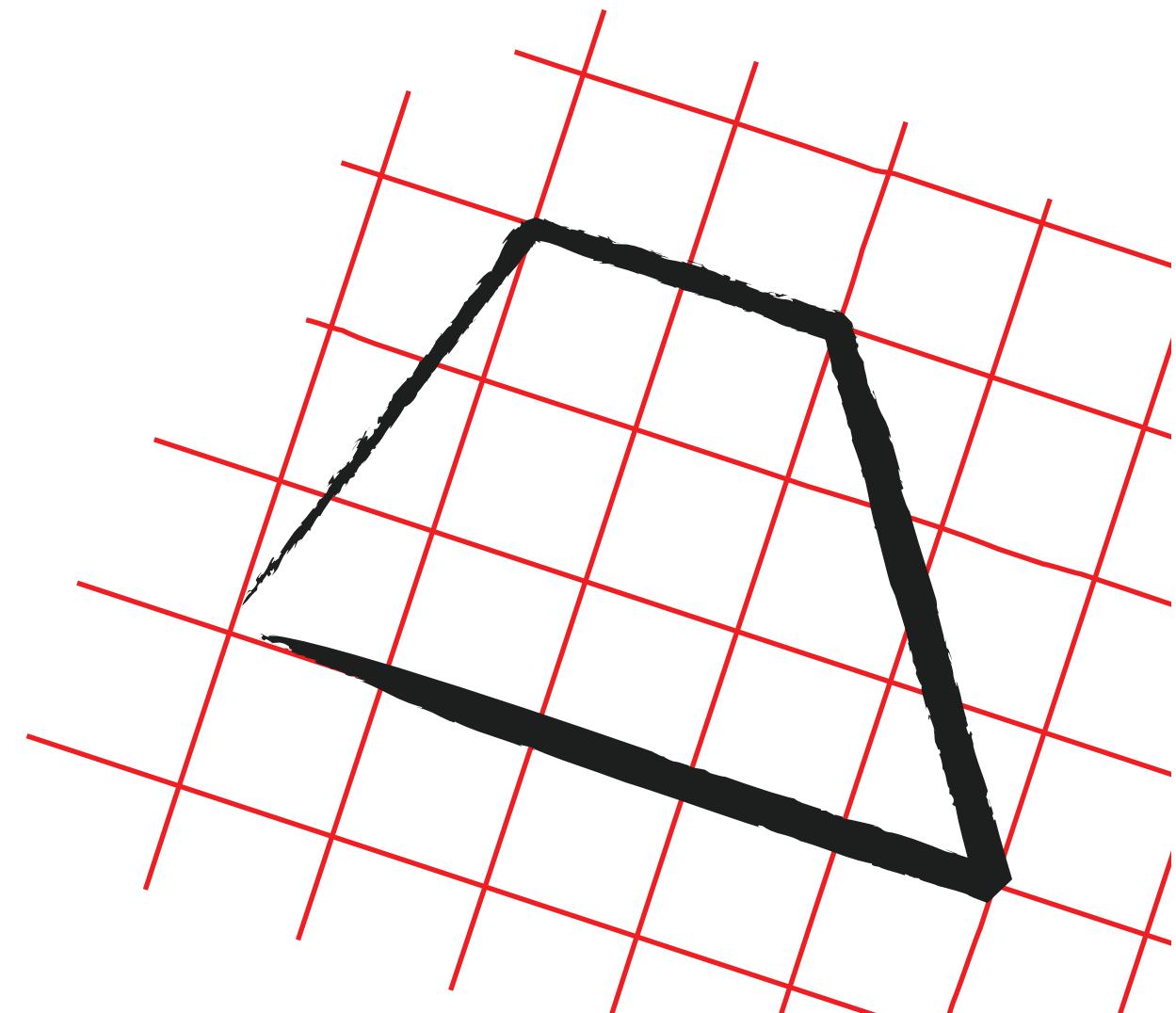


# Introdução

---

Qual é a melhor maneira para medir a área de um quadrilátero? Essa é a questão que guia este experimento. Nele, apresentaremos aos alunos algumas formas de realizar esse cálculo. Uma delas é a do produto das médias aritméticas dos lados opostos, que, como conta a história, já era conhecida no Egito e na Mesopotâmia por volta do 2º milênio a.C.! Mais recentemente, em 1899, o austríaco Georg Alexander Pick formulou o Teorema de Pick. Esse teorema apresenta uma expressão simples, baseada na contagem de pontos em um reticulado, e pode nos fornecer a área de qualquer polígono que respeite suas restrições.

Além desses, outros métodos serão apresentados. Todos eles possuem vantagens e desvantagens; caberá aos alunos perceberem qual o melhor método para determinada situação.



Qual é a área do quadrilátero?

# O Experimento

## Material necessário

- Papel quadriculado (ou papel milimetrado);
- Folhas sulfite;
- Régua;
- Tesoura.

\* A tesoura pode facilmente ser substituída por régua.

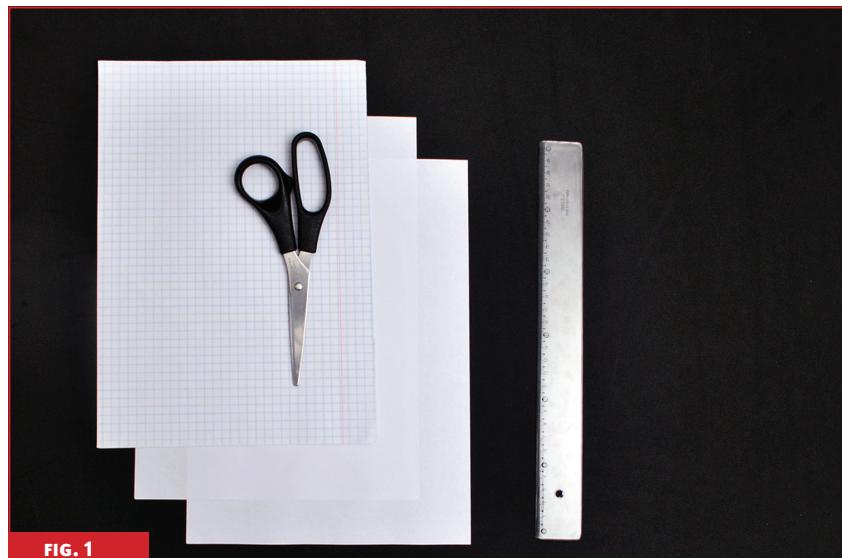


FIG. 1

## Preparação

Sugerimos que os alunos sejam divididos em trios para que haja discussões dentro do próprio grupo sobre cada questão apresentada. Além disso, o trabalho em equipe é necessário durante alguns procedimentos.

\* Coloque os alunos em grupo **antes** de iniciar as explicações. Assim, eles podem discutir e testar os novos métodos apresentados.

## Opções para calcular aproximadamente a área do quadrilátero

ETAPA  
1

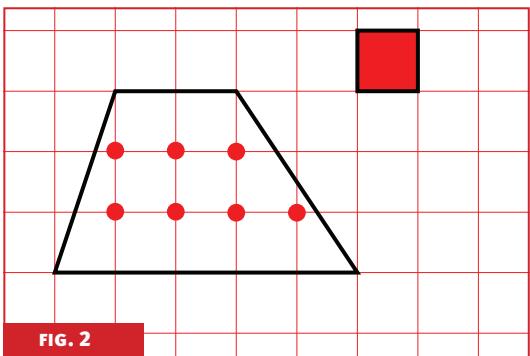
O experimento começa com uma exposição do professor sobre cada um dos três métodos apresentados abaixo para o cálculo aproximado da área de um quadrilátero.

### Teorema de Pick

O método consiste em contar os pontos internos e os da fronteira de um polígono posicionado com os vértices sobre os pontos em uma malha quadriculada, como nas FIGURAS 2 e 3. Chamaremos de  $I$  o número de pontos internos (indicados na FIGURA 2) e de  $F$  o número de pontos na fronteira (indicados na FIGURA 3).

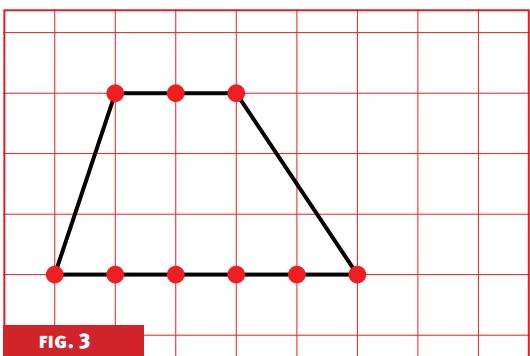


Qual é a área do quadrilátero?



**FIG. 2**

Para a demonstração do Teorema consulte o *GUIA DO PROFESSOR*.



**FIG. 3**

Definiremos o número de picks ( $P$ ) de um polígono como sendo

$$P = (1/2) \cdot F + I - 1.$$

O Teorema de Pick nos diz que, se considerarmos a área de cada quadradinho (indicado pelo quadradinho preenchido na FIGURA 2) como unidade de medida, a área de um polígono com vértices sobre os vértices do quadriculado é numericamente igual ao seu número de picks. Por exemplo, nas FIGURAS 3 e 2 acima temos um quadrilátero para o qual

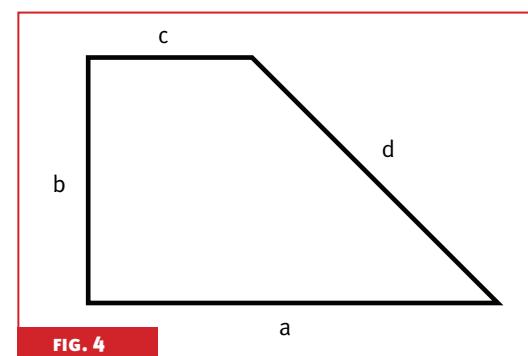
$I = 7$  e  $F = 9$ , portanto  $P = 10,5$  picks. Supondo cada quadrado com  $1\text{cm}^2$  ( $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ ), a área será igual a  $10,5\text{ cm}^2$ .

Escolhemos o trapézio por ser uma figura familiar para os alunos. Além disso, como eles sabem calcular exatamente a área de um trapézio, poderão comprovar a eficiência deste novo método. Note que o método funciona para qualquer polígono, mas utilizaremos neste experimento somente quadriláteros.

Um detalhe importante desse método é que, se os vértices do polígono estiverem sobre pontos do reticulado, o valor da área é exato, mas se isso não ocorrer, será apenas uma aproximação.

#### Método das médias

Outra forma de obter uma aproximação para a área de um quadrilátero que deve ser discutida com os alunos é: “dado um quadrilátero qualquer, uma aproximação da sua área é o produto entre as médias aritméticas das medidas dos lados opostos”.



Qual é a área do quadrilátero?

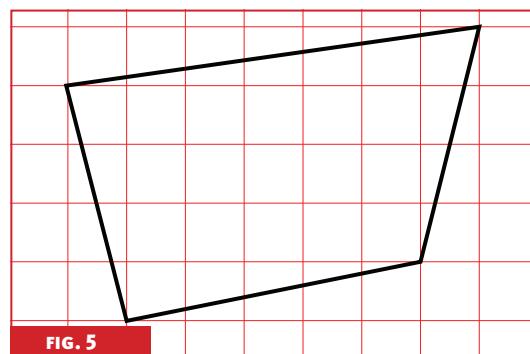
$$\left(\frac{a+c}{2}\right) \cdot \left(\frac{b+d}{2}\right)$$

Este método calcula a área aproximada de um quadrilátero e essa aproximação é melhor de acordo com a forma do quadrulado analisado. Por exemplo, ela é exata no caso de retângulos e muito ruim para paralelogramos com ângulos internos muito pequenos.

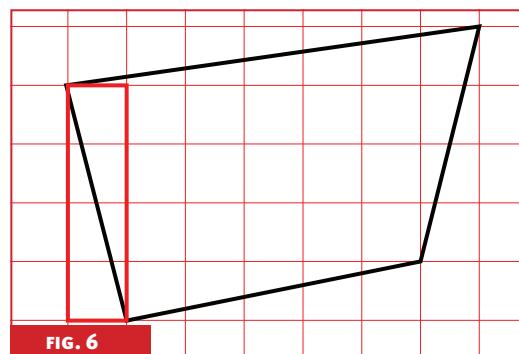
É um método bastante utilizado em situações práticas, cuja área medida é próxima de um retângulo e as únicas medidas que podem ser obtidas facilmente são as medidas de cada um dos lados.

#### Contar quadrados

A última forma a ser apresentada é a de contar quadrados dentro do polígono, isto é, verificar quantos quadrados unitários cabem no quadrilátero em questão.



Professor, note que fazer aproximações em cada quadradinho isoladamente nem sempre é a melhor opção. Sugerimos que se utilize, então, as arestas do quadrilátero como diagonais de retângulos.

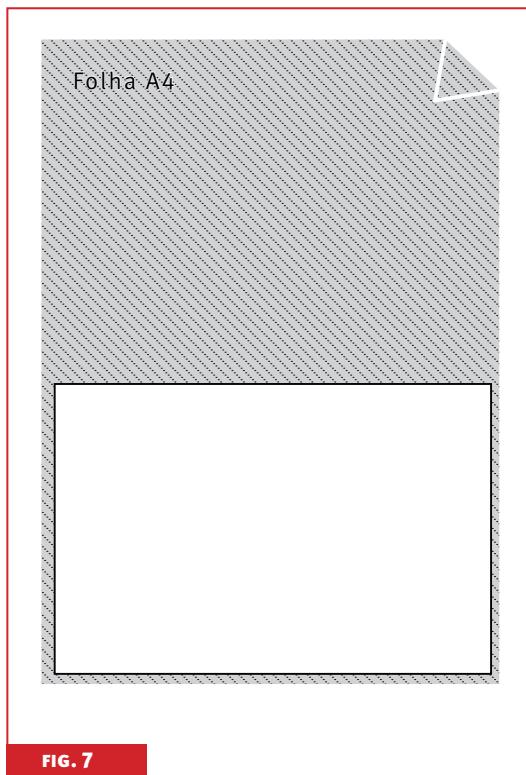


No caso da FIGURA 6 destacamos um retângulo de 1x4 quadradinhos. Como parte do quadrilátero ocupa metade da região interna do retângulo, então podemos assumir que a área daquela região corresponde a 2 quadradinhos.

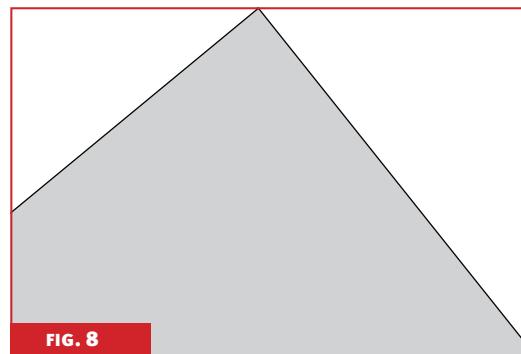
#### Construção do quadrilátero

Após a explicação dos três métodos, cada grupo deve construir um quadrilátero seguindo os passos da FOLHA DO ALUNO. O principal objetivo dessa construção é que a figura obtida não seja um polígono conhecido, o que torna o cálculo da área desafiador.

1. Eles devem primeiramente desenhar um retângulo na folha sulfite. Diga-lhes para usar somente metade da folha, o que evita que construam polígonos grandes demais e tornem cansativas as tarefas de contar quadrados e pontos.



2. Feito isso, peça para recortar partes desse retângulo de forma a construir um quadrilátero desconhecido, cuja área não consigam calcular diretamente. Oriente-os também a retirar apenas formas geométricas conhecidas, como triângulos e trapézios.



3. Terminada a construção, lembre-os de escrever os nomes dos componentes do grupo no quadrilátero e calcular sua área, subtraindo do retângulo inicial a área das regiões recortadas.

! Os grupos devem registrar no caderno o valor calculado para a área do quadrilátero construído. Esse valor será útil no FECHAMENTO.

---



---

## Utilização dos métodos

ETAPA  
2

---

Nesta etapa, os quadriláteros construídos devem ser distribuídos aleatoriamente para os grupos. Ao receber o polígono, os alunos devem calcular ou aproximar sua área usando os três métodos estudados. Passe pelos grupos verificando o andamento da atividade e, se necessário, volte às explicações sobre os métodos.

Para o método de Pick, eles usarão uma folha quadriculada. Neste método,



Qual é a área do quadrilátero?

os alunos devem tentar encaixar a figura de forma que o maior número possível de vértices esteja sobre pontos do reticulado. Recomende que girem a figura sobre a folha quadriculada até encontrarem a melhor posição.

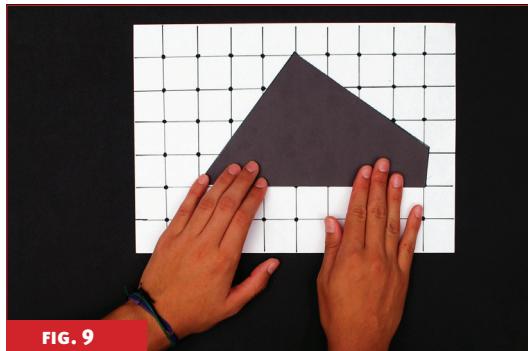


FIG. 9

Ao encaixar o polígono coincidindo o maior número possível de vértices com o reticulado, eles irão fazer o contorno do polígono na folha e em seguida contar os pontos.

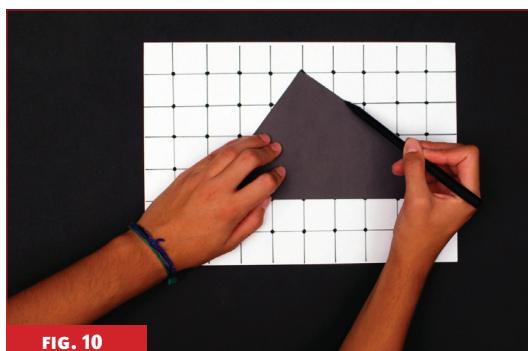


FIG. 10

Diga aos alunos que nem sempre será possível encaixar todos os vértices, portanto

eles terão que fazer uma aproximação. Para isso eles deverão desenhar um quadrilátero que tenha área bem próxima ao recebido, porém com os vértices todos no reticulado, FIGURA 11 e 12.

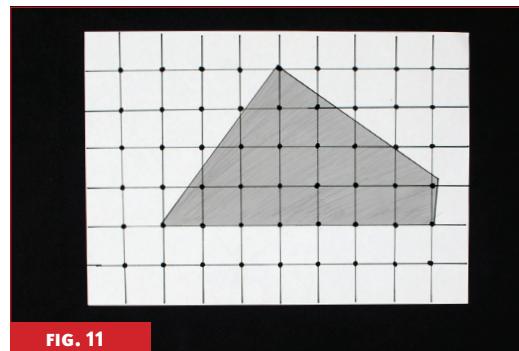


FIG. 11

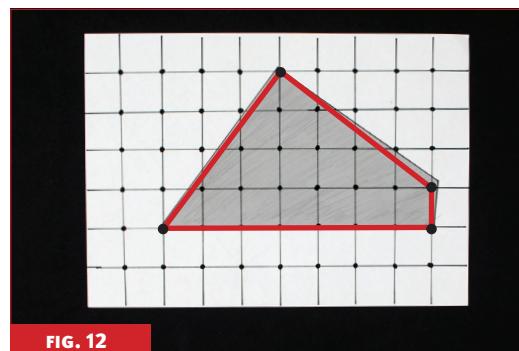


FIG. 12

No exemplo,  $F = 10$  e  $I = 12$ , assim  $A = 16$  picks, portanto, a área do quadrilátero aproximado é igual à área de 16 quadradinhos. Como cada um deles tem área  $9 \text{ cm}^2$ , o quadrilátero tem área aproximada de  $144 \text{ cm}^2$ .

Já no método de contar quadrados, peça-lhes que quadriculem uma folha como acharem melhor. No FECHAMENTO eles serão

Qual é a área do quadrilátero?

questionados sobre como tornar esse método mais preciso.

Para o cálculo com este método, os alunos devem posicionar o polígono sobre o quadriculado e fazer o contorno como anteriormente. Deste modo, a contagem dos quadrados é mais simples.

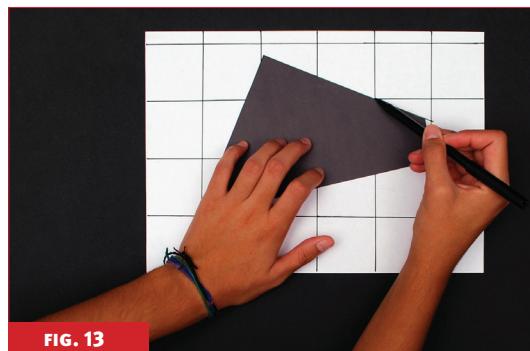


FIG. 13

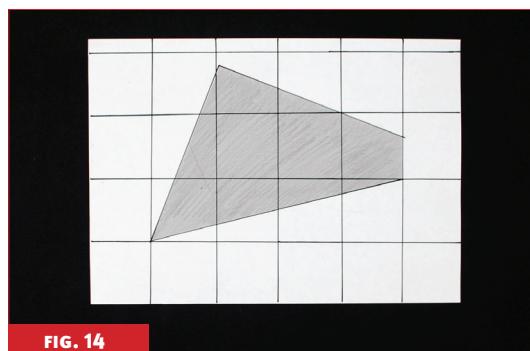


FIG. 14

Neste caso, a área do quadrilátero é aproximadamente igual à área de 6 quadrados completos. Como cada quadrado tem área  $25 \text{ cm}^2$ , o quadrilátero tem área aproximada de  $150 \text{ cm}^2$ .

# Fechamento

---

O FECHAMENTO pode ser iniciado comentando com os alunos sobre um 4º método de medir a área de um quadrilátero, o qual consiste em dividir a figura em polígonos conhecidos, como triângulos. Este método retorna o valor exato da área. Os alunos poderão, assim, comparar os resultados obtidos a partir dos outros métodos com o resultado obtido através deste, sem necessariamente perguntar ao dono do polígono o valor correto.

Feito isso, questione os alunos sobre qual foi o melhor método para calcular a área. As respostas devem variar e há um motivo para isso. Veremos.

## Comparação dos métodos

Separe os quadriláteros de acordo com o método que forneceu a melhor aproximação para a área. Analise com os alunos as características comuns de cada conjunto de polígonos obtido.

### 1. Método das médias

O método que usa as médias dos lados opostos tem uma boa precisão para quadriláteros que se aproximam de um retângulo.



Qual é a área do quadrilátero?

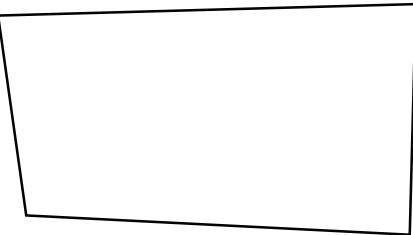


FIG. 15

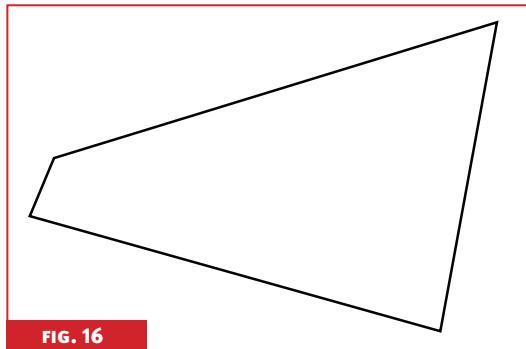


FIG. 16

Discuta vantagens e desvantagens deste método. Por exemplo, são necessárias apenas 4 medições, ou seja, pode ser fácil de usar e rápido na obtenção de uma aproximação para a área.

## 2. Contar quadrados

Sobre o método da contagem de quadrados, inicie com uma pergunta:

### Questão para os alunos

Como podemos aumentar a precisão desse método? Por quê?

Mostre-los uma construção na lousa, com a contagem de quadrados grandes e a contagem de quadrados menores.

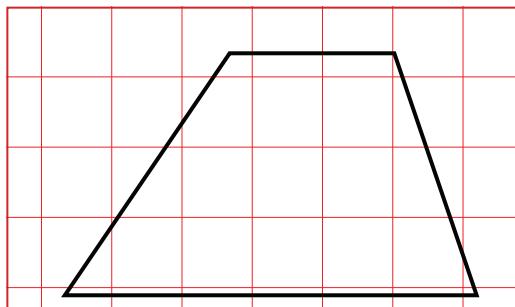


FIG. 17

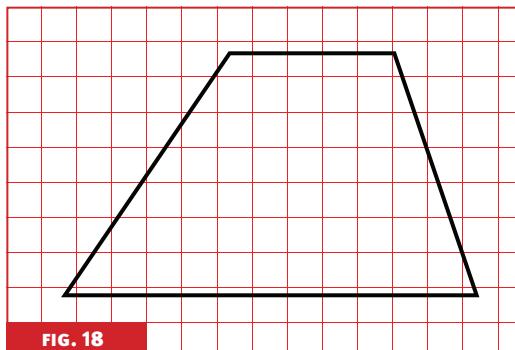


FIG. 18

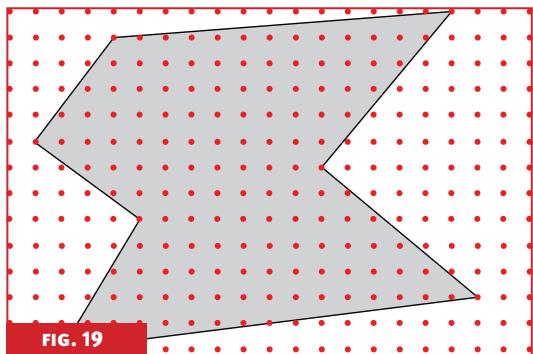
Os alunos devem concluir que quanto menores os quadrados mais precisa fica a medida, isto é, refinhar a unidade de medida é importante para melhorar a aproximação.

## 3. Método de Pick

Por último, fale sobre o Teorema de Pick, cuja maior vantagem é o fato de ser eficiente para qualquer tipo de polígono, convexo ou não. Apresente aos alunos uma figura com um polígono de mais lados, por exemplo:



Qual é a área do quadrilátero?



Uma desvantagem está no fato de os vértices precisarem estar sobre pontos.

### Aplicações

Por fim, comente aplicações de cada método e em qual situação cada método é mais eficiente. Valorize cada resposta de seus alunos. Para verificar uma aplicação do método de contar quadrados, veja se a sala de aula possui um revestimento em que aparecem quadrados (ou até retângulos). Peça que estimem a área usando esse método.

É importante mencionar também que, em algumas situações, uma resposta precisa nem sempre é a melhor; um cálculo rápido pode ser mais interessante.

Uma pergunta que pode ser feita é:

#### **Questão para os alunos**

Qual é o melhor método para calcular a área de um terreno?

Certamente a forma mais rápida se obter uma aproximação para essa área é a partir do método das médias. Já o Teorema de Pick pode ser usado em mapas, por exemplo. É possível, inclusive, relacionar o tamanho de um Pick com a escala presente no mapa. Isso pode ser experimentado com os alunos.



Qual é a área do quadrilátero?

# Ficha técnica



**AUTOR**  
Samuel Rocha de Oliveira

**COORDENAÇÃO DE REDAÇÃO**  
Rita Santos Guimarães

**REDAÇÃO**  
Rafael Santos

**REVISORES**  
**Matemática**  
Antônio Carlos Patrocínio  
**Língua Portuguesa**  
Carolina Bonturi  
**Pedagogia**  
Ângela Soligo

**PROJETO GRÁFICO**  
Preface Design

**ILUSTRADOR**  
Lucas Ogasawara de Oliveira

**FOTÓGRAFO**  
Augusto Fidalgo Yamamoto



**UNIVERSIDADE ESTADUAL  
DE CAMPINAS**

**Reitor**  
Fernando Ferreira Costa  
**Vice-Reitor**  
Edgar Salvadori de Decca  
**Pró-Reitor de Pós-Graduação**  
Euclides de Mesquita Neto

**MATEMÁTICA MULTIMÍDIA**  
**Coordenador Geral**  
Samuel Rocha de Oliveira  
**Coordenador de Experimentos**  
Leonardo Barichello

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA,  
ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO  
CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)**  
**Diretor**  
Jayme Vaz Jr.  
**Vice-Diretor**  
Edmundo Capelas de Oliveira

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons



FUNDO NACIONAL  
DE DESENVOLVIMENTO  
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de  
Educação a Distância

Ministério da  
Ciência e Tecnologia

Ministério  
da Educação

