Matemática Multimídia

NÚMEROS
E FUNÇÕES

O EXPERIMENTO

Experimento

Quadrado mágico aditivo

Objetivos da unidade

1. Apresentar o desafio de lógica Quadrado Mágico;
2. Estudar Progressões Aritméticas com o auxílio de quadrados mágicos.

UNICAMP

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Quadrado mágico aditivo

O experimento

Sinopse

Este experimento trata de Progressão Aritmética utilizando quadrados mágicos: quadrado mágico fundamental, passando por termos centrais e constantes mágicas. Também faremos um estudo teórico de Progressões Aritméticas, em que serão analisados termos centrais de PA, termos simétricos e soma de termos, e finalizaremos com alguns desafios para os alunos.

Conteúdos

- Sequência, Progressão Aritmética;
- Conjuntos, Lógica e Números.

Objetivos da unidade

1. Apresentar o desafio de lógica Quadrado Mágico;
2. Estudar Progressões Aritméticas com o auxílio de quadrados mágicos.

Duração

Uma aula dupla.

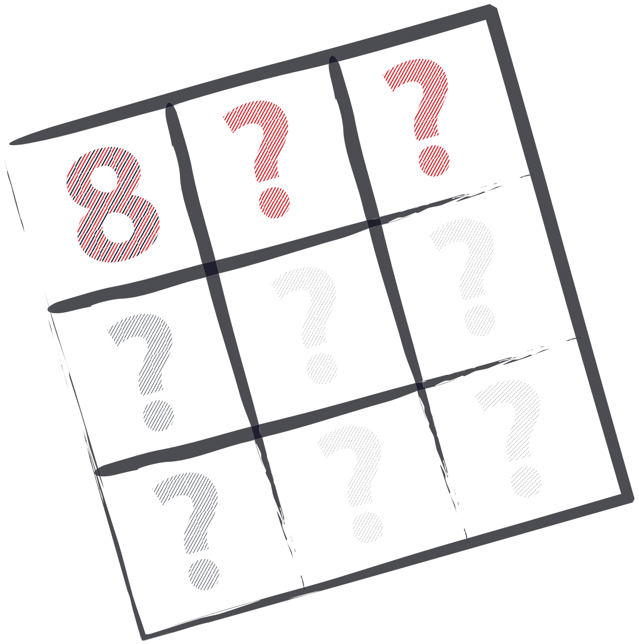
Material relacionado

- Experimento: Quadrado Mágico Multiplicativo;
- Vídeo: Melancolia, Mágica e Matemática;
- Áudio: Pensando em Progressão Aritmética.

Introdução

Quadrado mágico é considerado um tema fascinante do ponto de vista da matemática recreativa. Ele permite múltiplas explorações e conexões com diversas áreas da matemática, desde Decomposição Numérica até Análise Combinatória.

Os quadrados mágicos são arranjos quadrados de numerais cujas linhas, colunas e diagonais têm a mesma soma. Este nome provém de algumas crenças que acreditam que os quadrados mágicos possuem poderes especiais. Sua origem ainda é pouco conhecida hoje em dia, porém, os estudiosos dizem que o lugar mais provável seria a China, há cerca de 3000 anos.



O quadrado mágico com notação numérica moderna é atribuído ao imperador-engenheiro Yu, o Grande (2200 a.C.). Segundo a tradição, Yu estava observando o rio Amarelo, quando surgiu uma tartaruga divina, em cujo dorso estava o símbolo que hoje é conhecido pelo nome de *lo shu*. Assim, os chineses acreditavam que quem possuísse um quadrado mágico teria sorte e felicidade para toda a vida. Dessa forma, durante o século xv, os quadrados mágicos foram se propagando, chegando ao Japão e ao Oriente Médio e, posteriormente, à Europa. Eles estavam relacionados com alquimia e astrologia e, quando gravados em placas de prata, eram usados como amuleto contra a peste. Além de todas essas conotações místicas, os quadrados mágicos também foram seriamente estudados por matemáticos.

O estudo de quadrados mágicos está longe de ser tedioso, além de ser um assunto de fácil abordagem e que desperta a curiosidade até mesmo daqueles que não são estudantes de matemática. Podemos dizer também que mesmo usado como passatempo acabou se tornando uma parte importante da matemática contemporânea.

O Experimento

Material necessário

- Folha sulfite (*ou folha de caderno*).

Comentários iniciais

Um *Quadrado Mágico* é uma tabela quadrada de lado n, cuja soma dos termos de cada linha, coluna e diagonal (principal e secundária) é constante. Esse valor é chamado de *constante mágica*.

O quadrado mágico estudado inicialmente neste experimento é conhecido como *quadrado mágico fundamental*. Suas principais características são: lado 3, valores de 1 a 9 e constante mágica 15. Posteriormente, estudaremos variações do quadrado com constantes diferentes.

Quadrado mágico e PA

ETAPA
1

Professor, divida a sala em duplas e entregue uma Folha do Aluno para cada dupla. Inicie esta etapa pedindo que os alunos construam um quadrado mágico 3×3, com números de 1 a 9, cuja soma dos termos de cada linha, coluna e diagonal seja 15. Abaixo, segue uma das possíveis soluções:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

FIG. 1

Os alunos devem tentar resolver o exercício por um tempo determinado. Poderá haver respostas diferentes, pois o quadrado mágico se conserva se rotacionarmos ou refletirmos seus números, mantendo o 5 no centro, totalizando 8 soluções. Por exemplo:

* *O valor da constante mágica pode ser fornecido apenas se a turma estiver com dificuldade de encontrar uma solução.*

4	9	2
3	5	7
8	1	6

FIG. 2 *Exemplo de rotação de 90º para a direita.*

4	3	8
9	5	1
2	7	6

FIG. 3 *Exemplo de reflexão em torno da linha horizontal 9, 5, 1.*

Proponha agora o seguinte problema:

Questão para os alunos

Monte três quadrados mágicos com os seguintes números:

(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10),
(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17) e
(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18)

Os alunos devem construir mais três quadrados mágicos com os conjuntos de números dados, mas eles não terão a informação de qual será a constante mágica. Permita que os alunos tentem por um tempo e então sugira as seguintes questões:

* *Se os alunos tiverem muita dificuldade, conte qual a constante mágica dos quadrados que podem ser feitos com cada uma das sequências de números: 18, 27 e 30, respectivamente.*

Questão para os alunos

Quais foram as constantes mágicas encontradas nos quadrados feitos anteriormente?

Questão para os alunos

O que os quatro conjuntos de números dados têm em comum:

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9),
(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17),
(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18),
e (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10)?

Os alunos devem produzir os quadrados mágicos, cujas constantes mágicas são 18, 30 e 27 respectivamente. Caso alguém esteja com dificuldades, o quadrado feito no início da aula pode ser usado como dica de construção, já que basta preencher o novo quadrado usando os números do primeiro como índices para a nova sequência de nove números.

A principal característica em comum entre os quatro conjuntos é o fato de serem uma Progressão Aritmética (PA), com razões diferentes. No primeiro caso e último, a razão é 1; no segundo e terceiro, as razões são 2, embora os primeiros termos sejam diferentes.

Se considerarmos os números, em ordem crescente, como termos de uma PA, poderemos observar que o segundo e o terceiro quadrados mágicos podem ser montados como o primeiro:

3	13	11
17	9	1
7	5	15

FIG. 4

4	14	12
18	10	2
8	6	16

FIG. 5

3	8	7
9	6	2
5	4	10

FIG. 6

Termos centrais e constantes mágicas

ETAPA 2

Inicie esta etapa questionando os alunos sobre o termo do centro dos quadrados mágicos:

Questão para os alunos

Dado o conjunto de números (5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 e 29), responda:

a. É possível utilizá-lo para preencher um Quadrado Mágico?

b. Se sim, qual será o termo central?

Resolvendo este quadrado mágico e observando os anteriores, os alunos descobrirão que, dado um conjunto de 9 números que formam uma PA, se estes forem usados para completar um quadrado mágico, o termo central será o termo central da PA, ou seja, o termo a_5! Abaixo, segue o quadrado mágico resolvido:

8	23	20
29	17	5
14	11	26

FIG. 7

Toda PA de nove termos preenche um quadrado mágico de ordem 3.

Por outro lado, nem todo quadrado mágico de ordem 3 é uma Progressão Aritmética. Os termos do quadrado mágico a seguir, por exemplo, não formam uma PA:

10	1	7
3	6	9
5	11	2

FIG. 8

Este resultado é discutido mais detalhadamente no Guia do Professor.

No Guia do Professor há mais informações sobre esse tipo de quadrado mágico.

Posições dos termos periféricos do Quadrado Mágico.

Propomos, então, uma maneira de resolver a questão do posicionamento dos termos periféricos. Sugira uma brincadeira para estimulá-los:

- Considere um dos quadrados mágicos resolvidos (no caso, escolhemos o primeiro: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9). O termo central já foi identificado, é 5;
- Então, subtraia o termo central, de todos os números. Obterá, assim:

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4;$$

- Agora, o novo quadrado mágico formado por esses valores deverá ter 0 como constante mágica:

−3	2	1
4	0	−4
−1	−2	3

FIG. 9

É possível observar que todos os termos simétricos em relação a 0 são opostos aditivos. Por exemplo:

−3	2	1
4	0	−4
−1	−2	3

FIG. 10

Dessa forma, pensando em uma PA de nove termos, podemos dizer que o termo central do quadrado mágico será também o termo central da PA, assim como os valores simétricos serão também os valores simétricos da PA:

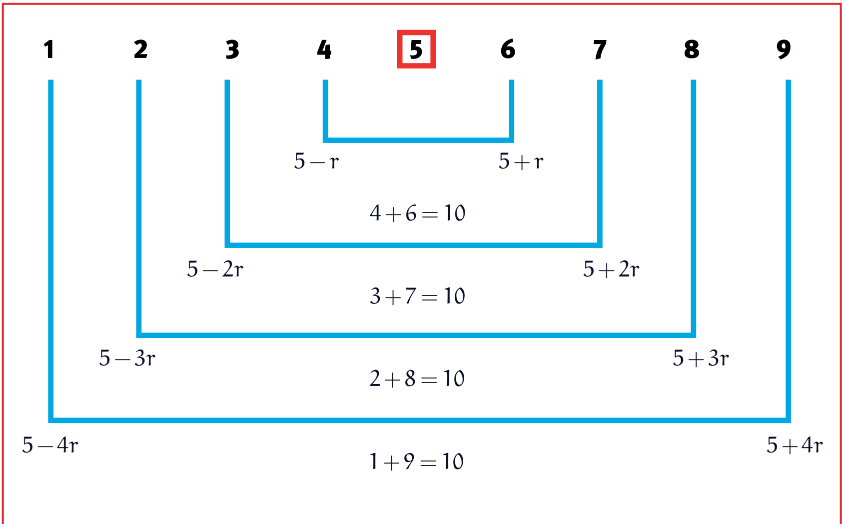


FIG. 11

Para maiores informações sobre quadrados mágicos, sugerimos um artigo publicado pela RPM: “Quadrado Mágico 3 × 3: um Novo Olhar”, Gonçalves, Alex Oleandro, Revista do Professor de Matemática, volume 59.

Constante mágica

Terminado o estudo relativo ao posicionamento dos termos, pode ser proposto um novo questionamento aos alunos:

Questão para os alunos

Dado um conjunto de nove números que preenchem um quadrado mágico, como saber qual será a constante mágica? Responda essa questão sem resolver o quadrado mágico.

Observe que a constante mágica será a soma de todos os números do quadrado mágico dividida por três, pois há três colunas e três linhas. Assim:

- $(1,2,3,4,5,6,7,8,9) \to (1+2+3+4+5+6+7+8+9)/3 = 15$
- $(1,3,5,7,9,11,13,15,17) \to (1+3+5+7+9+11+13+15+17)/3 = 27$
- $(2,4,6,8,10,12,14,16,18) \to (2+4+6+8+10+12+14+16+18)/3 = 30$
- $(2,3,4,5,6,7,8,9,10) \to (2+3+4+5+6+7+8+9+10)/3 = 18$
- $(5,8,11,14,17,20,23,26,29) \to$
  $\to (5+8+11+14+17+20+23+26+29)/3 = 51$

Fechamento

Depois que as etapas anteriores forem finalizadas, os alunos deverão encontrar uma formulação genérica para as soluções das questões propostas anteriormente. Assim, dada uma PA geral de nove termos,

$$a_1, \; a_2 \; a_3, \; a_4, \; a_5, \; a_6, \; a_7, \; a_8, \; a_9$$

os alunos devem se questionar novamente sobre os mesmos problemas das Etapas 1 e 2, e pensar uma nova resposta em função dos termos dessa PA.

Em relação ao termo central, este sempre será o a_5, como podemos observar devido à definição de uma PA (FIGURA 1).

Questão para os alunos

Usando seus conhecimentos prévios, como encontrar a constante mágica?

Esta questão pode ser resolvida usando soma de termos de uma PA:

$$S_n = n\frac{(a_1 + a_n)}{2}$$

Após encontrar essa soma, basta dividir o resultado por 3. Assim:

$$\text{Constante mágica} = \frac{S_n}{3} = n\frac{(a_1 + a_n)}{6}$$

Depois de realizadas todas as etapas anteriores, os alunos terão ferramentas para desenvolver uma solução geral para o quadrado mágico completado com uma PA de nove termos.

Questão para os alunos

Dada uma PA de nove termos: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, construa um quadrado mágico.

Novamente, essa solução poderá ser utilizada para qualquer quadrado mágico de nove termos cujos valores formem uma PA.

↗ Uma questão extra que pode ser interessante é: será que a soma de qualquer PA com nove termos inteiros positivos é sempre divisível por 3?

a_2	a_7	a_6
a_9	a_5	a_1
a_4	a_3	a_8

FIG. 12

Desafios

A seguir, são propostos alguns desafios que podem ser usados no final do experimento:

Questão para os alunos

Construa um quadrado mágico cujo termo central seja 11.

Esta questão poderá ter inúmeras soluções, pois qualquer PA cujo termo central for 11 será válida neste caso. Por exemplo:

2	17	14
23	11	−1
8	5	20

FIG. 13

Este quadrado mágico foi preenchido com uma PA de razão 3, com termo central 11 e constante mágica 33.

Questão para os alunos

Construa um quadrado mágico cujo termo central seja $\sqrt{2}$.

As observações feitas para a questão anterior também valem para esta. Assim, um exemplo de solução seria:

$-29 \cdot \sqrt{2}$	$21 \cdot \sqrt{2}$	$11 \cdot \sqrt{2}$
$41 \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-39 \cdot \sqrt{2}$
$-9 \cdot \sqrt{2}$	$-19 \cdot \sqrt{2}$	$31 \cdot \sqrt{2}$

FIG. 14

Este quadrado mágico foi preenchido com uma PA de razão $10 \cdot \sqrt{2}$, com termo do meio $\sqrt{2}$ e constante mágica $3 \cdot \sqrt{2}$.

Questão para os alunos

Usando os conhecimentos aprendidos até agora, complete o seguinte quadrado mágico:

		10
40		20

FIG. 15

Como visto anteriormente, os termos simétricos em relação ao termo do meio se mantêm a uma mesma distância deste. Assim, o termo central será a média dos termos, ou seja, 25. Sabendo o valor central, também já encontramos o termo simétrico a 20. Com as duas diagonais completas, calculamos a constante mágica, 75, facilmente encontrando os outros termos. Abaixo a solução completa:

30	35	10
5	25	45
40	15	20

FIG. 16

Questão para os alunos

Construa um quadrado mágico cuja constante mágica seja 51.

Neste desafio, os alunos novamente poderão encontrar muitas respostas diferentes. Abaixo, segue a descrição de um exemplo de solução:

Como sabemos de antemão, a constante mágica é igual a $n\frac{a_1+a_n}{6}$. Assim:

$$51 = \frac{9(a_1 + a_n)}{6} = \frac{3(a_1 + a_n)}{2}.$$

Sabemos também que a soma dos termos simétricos dividida por dois é igual ao termo central, então:

$$a_5 = \frac{(a_1 + a_n)}{2} = \frac{51}{3} = 17$$

Agora, sabendo o termo central, podemos escolher qualquer razão para construir uma PA que preencha o quadrado mágico. Por exemplo, com razão 1, teremos:

14	19	18
21	17	13
16	15	20

FIG. 17

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Leonardo Barichello

Coordenação de redação
Rita Santos Guimarães

Redação
Mariana Sacrini Ayres Ferraz

Revisores
Matemática
Antônio Carlos Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara de Oliveira

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
José Tadeu Jorge
Vice-Reitor
Fernando Ferreira da Costa

Grupo Gestor de Projetos Educacionais (ggpe – unicamp)
Coordenador
Fernando Arantes
Gerente Executiva
Miriam C. C. de Oliveira

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (imecc – unicamp)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

licença Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal