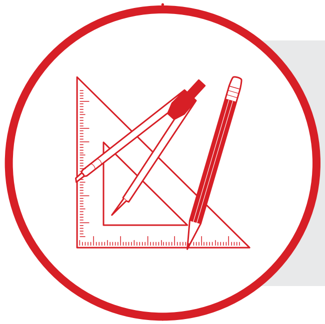
Matemática Multimídia

GEOMETRIA
E MEDIDAS

Guia do professor



Experimento

Quadrado mágico aditivo

Objetivos da unidade

1. Apresentar o desafio de lógica Quadrado Mágico;
2. Estudar Progressões Aritméticas com o auxílio de quadrados mágicos.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Quadrado mágico aditivo

Guia do professor

Sinopse

Este experimento trata de Progressão Aritmética utilizando quadrados mágicos: quadrado mágico fundamental, passando por termos centrais e constantes mágicas. Também faremos um estudo teórico de Progressões Aritméticas, em que serão analisados termos centrais de PA, termos simétricos e soma de termos, e finalizaremos com alguns desafios para os alunos.

Conteúdos

- Sequência, Progressão Aritmética;
- Conjuntos, Lógica e Números.

Objetivos da unidade

1. Apresentar o desafio de lógica Quadrado Mágico;
2. Estudar Progressões Aritméticas com o auxílio de quadrados mágicos.

Duração

Uma aula dupla.

Material relacionado

- Experimento: Quadrado Mágico Multiplicativo;
- Vídeo: Melancolia, Mágica e Matemática;
- Áudio: Pensando em Progressão Aritmética.

Matemática Multimídia

Introdução

Quadrados Mágicos são muito conhecidos por qualquer pessoa que já tenha se interessado por matemática recreativa. As primeiras menções que podemos encontrar datam de 3 mil anos, na China, e até hoje eles continuam intrigando curiosos e matemáticos profissionais: Martin Gardner, por exemplo, ofereceu um prêmio a quem encontrasse um quadrado mágico de ordem 3, composto apenas por números inteiros que sejam quadrados perfeitos.

Na *Revista do Professor de Matemática*, os Quadrados Mágicos já foram citados diversas vezes. Particularmente, recomendo os textos publicados nos volumes 41 e 59. Ambos, através de abordagens diferentes, concluem que o quadrado mágico de ordem 3 formado pelos números de 1 a 9 admite essencialmente uma única solução, sendo as demais obtidas através de simetrias da primeira.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

FIG. 1

O quadrado acima é justamente uma dessas soluções e é conhecido como quadrado de Loh-Shu. Note que sua constante mágica (soma de cada uma das linhas, colunas e diagonais) é igual a 15. No Experimento, esse quadrado mágico é chamado de quadrado mágico fundamental.

Motivação

Neste experimento, abordaremos os quadrados mágicos de ordem 3 preenchidos por quaisquer nove números, não necessariamente de 1 a 9.

Com isso, os estudantes poderão chegar até o conteúdo de Progressões Aritméticas ou até mesmo conhecer o caso mais geral de soluções para quadrados mágicos de ordem 3, que será apresentado neste guia.

O experimento

Etapa 1 **Quadrado mágico e PA**

Nesta etapa, os alunos terão que montar quadrados mágicos com quatro sequências de nove números diferentes, sendo que a primeira sequência deve ser feita com os números de 1 a 9. Vamos mostrar que os outros três quadrados mágicos podem ser obtidos a partir do primeiro, com transformações simples:

Somando uma constante

Partiremos do quadrado de Loh-Shu, apresentado na Introdução. É possível aplicar uma transformação simples nos números que o compõem para obter uma nova solução com novos números: some 1 a cada um de seus elementos. Assim, obtemos:

9	2	7
4	6	8
5	10	3

FIG. 2

Note que o quadrado resultante também é mágico, mas sua constante mágica é igual a 18 (a constante mágica do quadrado de Loh-Shu era 15 e adicionamos 1 para cada um dos termos que compõem suas linhas, colunas e diagonais) e seus termos são 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.

Esse resultado sugere a possibilidade de somar qualquer valor aos termos de um quadrado mágico para obter novos quadrados mágicos. Por exemplo, somando 7 a cada um dos termos do quadrado de Loh-Shu, temos:

15	8	13
10	12	14
11	16	9

FIG. 3

Note que o quadrado resultante também é mágico, mas tem constante mágica igual a 36 ($15+7+7+7$) e seus termos são 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 e 16. Assim, vamos fazer a seguinte afirmação sobre possíveis soluções para quadrados mágicos de ordem 3:

Qualquer sequência de nove números inteiros consecutivos pode ser arranjada na forma de um quadrado mágico.

Para demonstrar essa afirmação, é importante notar que, ao somar um valor fixo a cada um dos termos do quadrado mágico, cada soma dos termos de uma linha, coluna ou diagonal recebe o mesmo acréscimo: três vezes o valor somado aos termos, mantendo, assim, a propriedade mágica.

Multiplicando por uma constante

Outra transformação simples que pode ser feita com os termos do quadrado de Loh-Shu para obtenção de novos quadrados mágicos é a multiplicação dos termos por 2. Assim, obtemos:

16	2	12
6	10	14
8	18	4

FIG. 4

Note que a soma de cada linha, coluna e diagonal é igual a 30 (15×2), portanto, o quadrado é mágico. Contudo, seus termos não são mais consecutivos: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 18.

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos obter novas soluções, por exemplo, multiplicando os termos do quadrado Loh-Shu por 5:

40	5	30
15	25	35
20	45	10

FIG. 5

O resultado é um quadrado mágico com constante mágica igual a 75 (15×5) e termos iguais a 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 e 45.

Como feito anteriormente, sem realizar uma demonstração rigorosa do resultado, vamos afirmar que:

Qualquer sequência de nove múltiplos consecutivos de um número inteiro pode ser arranjada na forma de um quadrado mágico

Para demonstrar essa afirmação, note que todos os termos da soma de cada linha, coluna e diagonal foram multiplicados pelo valor escolhido e, portanto, basta colocar este valor em evidência em cada uma das somas para demonstrar que todas continuam iguais, preservando a propriedade mágica.

Combinando as duas possibilidades

Agora, vejamos o que acontece quando combinamos as duas soluções apresentadas. Por exemplo, vamos tomar o quadrado de Loh-Shu, multiplicar seus termos por 3 e depois somar 2:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

$\Rightarrow$

26	5	20
11	17	23
14	29	8

FIG. 6

Com algumas somas, podemos verificar que o quadrado resultante também é mágico e sua constante mágica é igual a 51 ($15 \times 3 + 2 + 2 + 2$). Mas o que podemos dizer sobre seus termos? Qual é a regularidade que apresentam?

Quando ordenamos seus termos, podemos ver facilmente que se trata dos termos de uma Progressão Aritmética de razão igual a 3 e primeiro termo igual a 5:

5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 e 29.

Esse resultado nos direciona para a seguinte conclusão:

Quadrados Mágicos e Progressões Aritméticas

Dada uma Progressão Aritmética de nove termos, quando posicionados todos os seus termos a_i na posição que o número i ocupa no quadrado de Loh-Shu, o quadrado resultante também será mágico.

Omitiremos a demonstração desse resultado, mas ela pode ser feita de maneira bastante simples, combinando os argumentos apresentados nos dois casos anteriores.

Etapa 2 **Termos centrais e constantes mágicas**

Esta etapa apresenta um método bastante simples para a determinação do posicionamento dos termos de uma Progressão Aritmética qualquer de nove termos, de modo que se obtenha com eles um quadrado mágico de ordem 3. Esse método se baseia na transformação dos termos dados através de somas e multiplicações nos termos da sequência -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 e 4, simplificando bastante a visualização das somas em um quadrado mágico.

−3	2	1
4	0	−4
−1	−2	−3

FIG. 7

Além disso, o texto desta etapa do Experimento traz uma maneira simples de se obter a constante mágica. Basta notar que a soma de todos os nove termos é igual à soma das três linhas e, portanto, é igual a três vezes a constante mágica.

Fechamento

O conteúdo necessário para concluir a proposta original já foi discutido no próprio Experimento e na Etapa 2. Portanto, o que faremos no Fechamento é expandir um pouco mais os resultados relativos às soluções possíveis para um quadrado mágico de ordem 3.

Veja que o resultado Quadrados Mágicos e Progressões Aritméticas abre uma gama muito grande de soluções, mas será que existe alguma solução que não seja uma Progressão Aritmética?

Outras soluções

Comecemos pelo seguinte quadrado:

10	1	7
3	6	9
5	11	2

FIG. 8

O quadrado acima é mágico com constante mágica igual a 18. Olhando com atenção os seus termos: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10 e 11, podemos notar que não se trata de uma Progressão Aritmética. E, então, qual será o padrão desses números?

Para enxergar esse padrão, vamos começar pintando com diferentes padrões os três primeiros, os três centrais e os três últimos números da sequência ordenada, conforme as posições que eles ocupavam no quadrado anterior:

10	1	7
3	6	9
5	11	2

FIG. 9

Note que toda linha, coluna e a diagonal principal são formadas por exatamente um termo de cada trinca, o que não vale para a outra diagonal, que é formada pelos três elementos da trinca central. Com isso, é possível dizer que, se um valor constante, digamos k, for somado aos termos da última trinca e depois esse mesmo valor for subtraído dos termos da primeira trinca, sem alterar os termos da trinca central, o resultado das somas será mantido, preservando a propriedade mágica do quadrado.

Por exemplo, vamos subtrair 1 da primeira trinca e adicionar 1 à segunda trinca, obtendo a sequência ordenada: 0, 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11 e 12, que resulta no seguinte quadrado:

11	0	7
2	6	10
5	12	1

FIG. 10

Note que o quadrado resultante continua mágico e com constante mágica igual a 18. Esse resultado pode ser generalizado da seguinte maneira: se os termos de um quadrado mágico forem agrupados em trincas seguindo as posições destacadas no quadrado anterior, podemos somar um valor qualquer aos termos da trinca de listras contínuas, desde que seja subtraído o mesmo valor dos termos da trinca de bolinhas.

Está claro que esse resultado pode ser combinado com as resoluções anteriores, revertendo-se em um novo conjunto de soluções para os quadrados mágicos de ordem 3:

Qualquer sequência de nove termos que possa ser descrita da seguinte maneira:

$a_1, a_1+r, a_1+2r, a_1+k+3r, a_1+k+4r, a_1+k+5r, a_1+2k+6r,$
$a_1+2k+7r$ e $a_1+2k+8r$

pode ser arranjada de modo a resultar em um quadrado mágico.

Observe que esse caso engloba as três possibilidades discutidas neste texto (variando o valor de a_1 e r, obtemos todas as PAs de nove termos; variando o valor de k, obtemos as soluções previstas nesse último caso) e depende da escolha de três valores (a_1, r e k), ou seja, possui três graus de liberdade.

Existe mais alguma solução?

Mas será que existe mais alguma solução para os quadrados mágicos de ordem 3?

Vejamos o quadrado abaixo:

1	-2	1
0	0	0
-1	2	-1

FIG. 11

Repare que se trata de um quadrado mágico de constante igual a 0. Mas será que os termos se encaixam no caso mais geral descrito anteriormente?

Simplesmente ordená-los não ajuda muito: −2, −1, −1, 0, 0, 0, 1, 1 e 2. Porém, se dispusermos os termos na seguinte ordem: −2, −1, 0, −1, 0, 1, 0, 1 e 2, poderemos ver que se trata do caso $a_1 = -2$, $r = 1$ e $k = -2$.

O fato é que a última família de soluções engloba todas as soluções possíveis para esse problema. Para demonstrar esse resultado, basta escrever o sistema com as oito equações lineares (uma para cada uma das somas do quadrado) e nove variáveis (cada uma das entradas). Depois, simplificando o sistema (isso pode ser feito com ajuda de softwares), ele será reduzido a um sistema equivalente com apenas seis equações, ou seja, o espaço das soluções possui exatamente $9-6=3$ graus de liberdade. Note que a família descrita anteriormente tem exatamente três graus de liberdade: a_1, r e k, portanto, ela contempla todas as soluções possíveis.

O texto *Vector Spaces of Magic Squares* faz a demonstração desse resultado com toda a formalidade necessária, usando argumentos básicos de Álgebra Linear.

Variações

Uma variação desta proposta é explorar quadrados mágicos multiplicativos, ou seja, quadrados nos quais o resultado da multiplicação dos termos de toda linha, coluna e diagonal são iguais. Essa variação culmina, equivalentemente, em Progressões Geométricas e foi explorada no experimento *Quadrado Mágico Multiplicativo*.

Bibliografia

Andrade, Lenimar Nunes de. **Mais sobre Quadrados Mágicos**. Revista do Professor de Matemática, vol. 41.

Gonçalves, Alex Oleandro. **Quadrado Mágico 3 × 3: um novo olhar**. Revista do Professor de Matemática, vol. 59.

Ward III, James E. **Vector Spaces of Magic Squares**. Mathematics Magazine, Vol. 52, n. 2.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Leonardo Barichello

Revisores
Matemática
Antônio Carlos Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
José Tadeu Jorge
Vice-Reitor
Fernando Ferreira da Costa

Grupo Gestor de Projetos Educacionais (GGPE – UNICAMP)
Coordenador
Fernando Arantes
Gerente Executiva
Miriam C. C. de Oliveira

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal