Matemática Multimídia

NÚMEROS
E FUNÇÕES

O EXPERIMENTO

Experimento

O quadrado de Koch

Objetivos da unidade

1. Estudar Progressões Geométricas, explorando alguns aspectos de um fractal;
2. Introduzir a soma infinita dos termos de uma Progressão Geométrica.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

O quadrado de Koch

O experimento

Sinopse

Ao fazer os primeiros passos da construção para a formação do fractal que denominamos Quadrado de Koch, os alunos tentarão identificar os padrões que seguem o perímetro e a área das figuras obtidas. Assim, descobrirão Progressões Geométricas e farão análises sobre seu comportamento.

Conteúdos

- Sequência, Progressão Geométrica;
- Sequência, Soma de Progressões Geométricas.

Objetivos

1. Estudar Progressões Geométricas, explorando alguns aspectos de um fractal;
2. Introduzir a soma infinita dos termos de uma Progressão Geométrica.

Duração

Uma aula dupla.

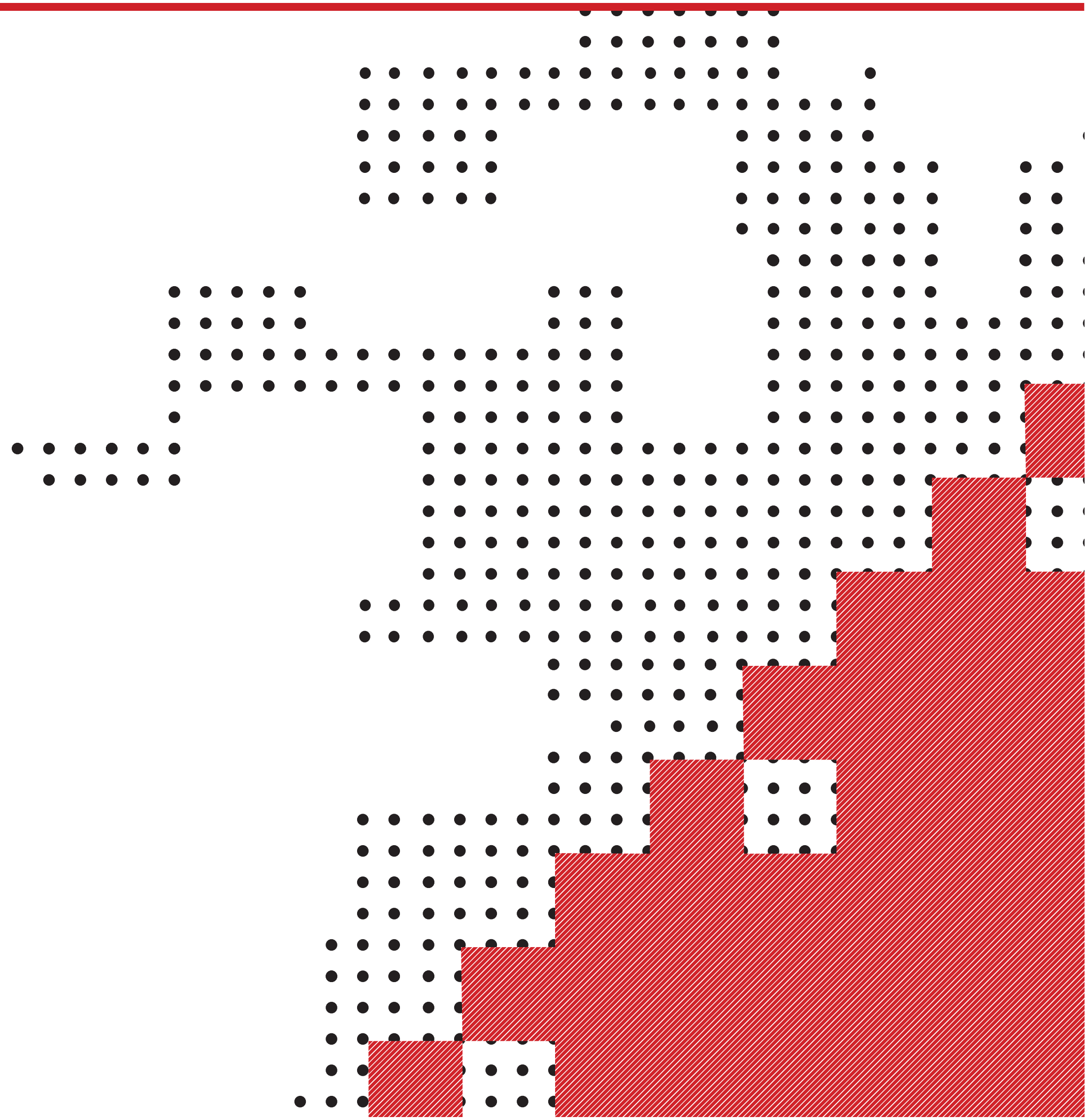
Matemática Multimídia

Introdução

Neste experimento os alunos farão os primeiros passos na construção do fractal que chamamos de Quadrado de Koch —essa nomenclatura se deve à semelhança do seu processo de construção com a construção do famoso fractal “Floco de Neve de Koch”. Em seguida, deverão fazer a análise desta figura que se revelará um tanto estranha para eles, pois, se o processo de construção for repetido indefinidamente, o perímetro cresce ilimitadamente e tende a infinito, enquanto sua área tende a um determinado número.

Olhando com mais cuidado, observaremos que os perímetros e as áreas da figura encontrada podem ser descritos como Progressões Geométricas. Assim, faremos do lúdico uma oportunidade de introduzir o conceito da soma infinita dos termos de uma P. G. e, ao invés de definir para depois apresentar exemplos, nesta atividade os alunos construirão uma soma e, a partir dela, formalizarão os conceitos em conjunto com o professor.

Além disso, os alunos terão a oportunidade de conhecer um pouco da geometria fractal, que é uma geometria diferente da euclidiana, e se depararão, mesmo que intuitivamente, com o conceito de limite, que é muito importante na matemática.



O Experimento

Material necessário

- Folha de papel quadriculado (32 cm × 44 cm) (*no anexo encontra-se um modelo de folha pontilhada, mas também é possível usar papel milimetrado*);
- Lápis;
- Borracha;
- Calculadora;
- Régua.

* *Antes de iniciar o experimento, seria interessante falar um pouco sobre fractais, dando outros exemplos. Veja o* GUIA DO PROFESSOR.

FIG. 1

Preparação

Antes de iniciar a atividade, divida os alunos em duplas, entregue-lhes uma Folha do Aluno e duas folhas de papel quadriculado (ou, se preferir, duas folhas pontilhadas ou duas folhas de papel milimetrado).

Caso não seja usada a folha pontilhada do Anexo, é necessário adequar a unidade utilizada para que o comprimento do lado do quadrado inicial seja múltiplo de 27, pois isso facilitará a construção do fractal. Também, como será justificado posteriormente, a largura e o comprimento da folha devem ter, no mínimo, o dobro da medida do lado do quadrado.

Os primeiros passos da construção do quadrado de Koch

ETAPA 1

Logo que a classe estiver organizada, os alunos deverão realizar os seguintes procedimentos, sob sua supervisão:

1. Oriente os alunos para que desenhem, no centro da folha, um quadrado, como indicado na Preparação. Se estiver

usando o ANEXO, utilize 28 pontinhos para cada lado;

2. Substitua cada segmento pelo padrão da FIGURA 2. Observe que serão formados segmentos com $\frac{1}{3}$ do comprimento do lado do quadrado anterior, o que é equivalente a acrescentar a cada segmento do quadrado inicial outro quadrado de lado $\frac{1}{3}$, e assim sucessivamente;

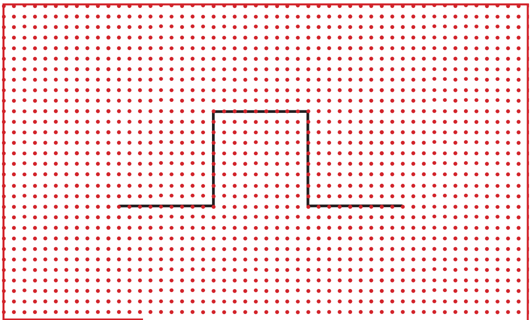


FIG. 2

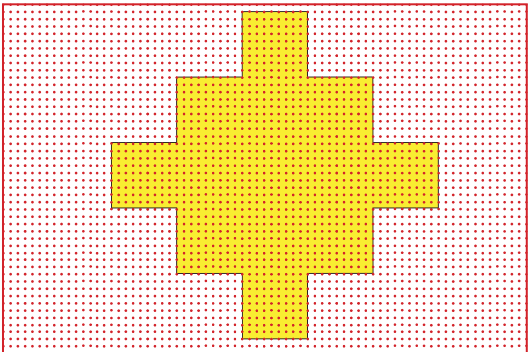


FIG. 3 *Fim do passo 2.*

* *Professor, reforce o fato de que os alunos devem desenhar no centro da folha, pois isso possibilitará a construção de todos os passos sugeridos.*

3. Repita o procedimento três vezes, totalizando quatro passos. É importante substituir pelo padrão todos os segmentos resultantes do fim de cada um dos passos. Para uma melhor visualização da figura, ao final de cada passo, hachure-a.

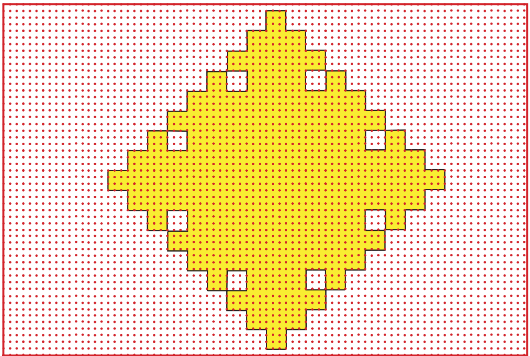


FIG. 4 *Fim do passo 3.*

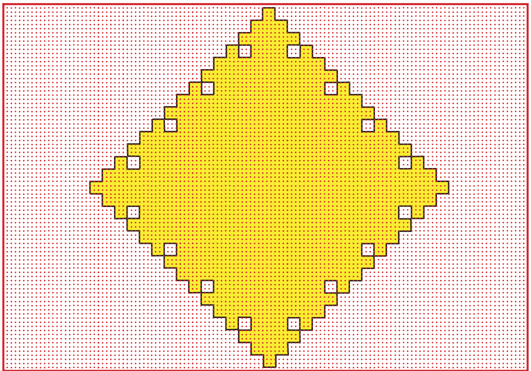


FIG. 5 *Fim do passo 3.*

Atenção

Observe quais alunos não conseguem obter a figura desejada e os auxilie; este é um passo muito importante para a ETAPA 2.

Durante a construção, os alunos deverão completar uma linha da TABELA 1 (presente na FOLHA DO ALUNO) ao final de cada passo. Para facilitar a análise dos dados na ETAPA 2, peça para que eles considerem o comprimento do lado do primeiro quadrado como sendo 1 unidade.

Passos	**Comprimento dos segmentos**	**Perímetro da figura**	**Área acrescentada**
1	1	4	0
2	$\frac{1}{3}$	$20 \cdot \frac{1}{3}$	$4 \cdot \frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{9}$	$100 \cdot \frac{1}{9}$	$20 \cdot \frac{1}{81}$
4	$\frac{1}{27}$	$500 \cdot \frac{1}{27}$	$100 \cdot \frac{1}{729}$

TABELA 1

Análise de dados

ETAPA
2

Nesta etapa, com base nos dados da TABELA 1, feita na ETAPA 1, os alunos tentarão responder a algumas perguntas sobre o comprimento dos segmentos, perímetro e área da figura. Para isso, com exceção da “área da figura limite” que é dada pela soma dos termos de uma P. G., é necessário que os alunos já conheçam a definição de Progressão Geométrica e saibam como encontrar seu termo geral.

Definição

Uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de números reais não nulos é uma *Progressão Geométrica* (P. G.) se, para todo $i = 1, 2, \ldots$, o quociente entre um termo qualquer (a partir do 2º) e o termo antecedente, $\frac{a_{i+1}}{a_i}$, é sempre o mesmo (constante).

Essa constante é chamada de razão da P. G. e é indicada por q.

Termo geral da P. G.

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ uma P. G. de razão q. O termo a_n, que ocupa a n-ésima posição da sequência, é dado por: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Comprimento dos segmentos

Questão aos alunos

1. Você saberia responder qual será o comprimento de cada segmento após o quinto passo? Por qual constante é necessário multiplicar o comprimento de um segmento para obter o comprimento do segmento obtido no passo seguinte?
2. Que tipo de sequência formam os valores dos comprimentos? Encontre uma expressão para o comprimento após o n-ésimo passo.
3. O que acontece com o comprimento dos segmentos quando repetimos o processo indefinidamente, ou seja, quando o valor de n torna-se muito grande?

O comprimento dos segmentos das quatro figuras obtidas constituem a seguinte sequência:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9} \text{ e } \frac{1}{27}$$

Se olharmos atentamente, perceberemos que se trata de uma P. G. com o primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = \frac{1}{3}$. Assim, a constante que deve ser multiplicada para obter os termos da sequência é igual a $\frac{1}{3}$ e o comprimento dos segmentos após o quinto passo será igual a $\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$.

Agora, como conhecemos o primeiro termo a_1 e a razão q, podemos escrever a expressão do termo geral da P. G., ou seja, a expressão para o segmento após o n-ésimo passo:

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}$$

Como a razão é menor que 1, à medida que n cresce, a_n decresce. E, se o valor de n torna-se muito grande, o valor de a_n torna-se muito pequeno, aproximando-se cada vez mais de zero. Neste caso, dizemos que o limite de a_n é zero quando n cresce ilimitadamente.

Perímetro da figura

Questão aos alunos

1. Você saberia responder qual será o perímetro da figura após o quinto passo?
   Por qual constante é necessário multiplicar o perímetro de uma figura para obter o perímetro da figura no passo seguinte?
2. Que tipo de sequência formam os valores dos perímetros? Ache uma expressão para o perímetro da figura após o n-ésimo passo.
3. O que acontece com o perímetro quando repetimos o processo indefinidamente?

O perímetro das quatro figuras obtidas são:

$$4,\ 20 \cdot \frac{1}{3},\ 100 \cdot \frac{1}{9} \text{ e } 500 \cdot \frac{1}{27}.$$

Se olharmos atentamente, perceberemos que se trata de uma P. G. com o primeiro termo $a_1 = 4$ e razão $q = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$. Assim, a constante que deve ser multiplicada para obter os termos da sequência é igual a $5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$ e o perímetro da figura após o quinto passo será igual a $500 \cdot \left(\frac{1}{37}\right) \cdot 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 2500 \cdot \left(\frac{1}{82}\right)$.

Agora, como conhecemos o primeiro termo a_1 e a razão q, podemos escrever a expressão do termo geral da P. G., ou seja, a expressão para o perímetro da figura após o n-ésimo passo:

$$a_n = 4 \cdot \left(5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)\right)^{(n-1)} = 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{(n-1)}.$$

Como a razão é maior que 1, à medida que n cresce, a_n cresce. E, se o valor de n torna-se muito grande, o valor de a_n também torna-se muito grande, crescendo ilimitadamente.

Área da figura

Neste tópico, trataremos da *soma infinita dos termos de uma P. G.* Com ele, queremos que o aluno reflita sobre as perguntas feitas para que no Fechamento o professor introduza o tema.

Questão aos alunos

1. Você saberia responder qual será a área da figura após o quarto passo?
2. Calcule a área da figura após o quinto passo.
3. O que acontece com área quando repetimos o processo indefinidamente?

Em cada passo, acrescentamos novos padrões à figura e, como podemos observar pelas FIGURAS 3, 4 e 5, também acrescentamos área. Deste modo, a área total da figura após o quarto passo será a soma da área do quadrado inicial com os acréscimos realizados nos passos 2, 3 e 4, ou seja,

$$1 + 4 \cdot \frac{1}{9} + 20 \cdot \frac{1}{81} + 100 \cdot \frac{1}{729}.$$

Para calcular a área da figura após o quinto passo, temos que descobrir o acréscimo realizado a ela. Para isso, devemos observar que, *a partir do segundo passo*, a área acrescentada forma a seguinte sequência:

$$4 \cdot \frac{1}{9}, 20 \cdot \frac{1}{81} \text{ e } 100 \cdot \frac{1}{729}$$

Visto que se trata de uma P. G. com o primeiro termo $a_1 = 4 \cdot \frac{1}{9}$ e razão $q = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$, temos que a área acrescentada após o quinto passo será igual a

$$100 \cdot \tfrac{1}{729} \cdot 5 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right) = 500 \cdot \tfrac{1}{2187}$$

e, assim, a área da figura será igual a

$$1 + 4 \cdot \frac{1}{9} + 20 \cdot \frac{1}{81} + 100 \cdot \frac{1}{729} + 500 \cdot \frac{1}{2187}$$

Agora, para saber o que acontece com a área quando o o processo for repetido indefinidamente, devemos verificar o que acontece quando somamos os infinitos termos da P. G. que encontramos. Antes de apresentar a expressão que fornece esta soma, é interessante que os alunos façam aproximações utilizando uma calculadora.

A figura caberá na folha?

Neste tópico, como fizemos no tópico "Área da figura", trataremos da soma infinita dos termos de uma P. G. e também queremos que o aluno reflita sobre as perguntas feitas para que no FECHAMENTO o professor aborde o tema.

Questão aos alunos

Você saberia responder se a figura caberá na folha ao se repetir o processo indefinidamente?

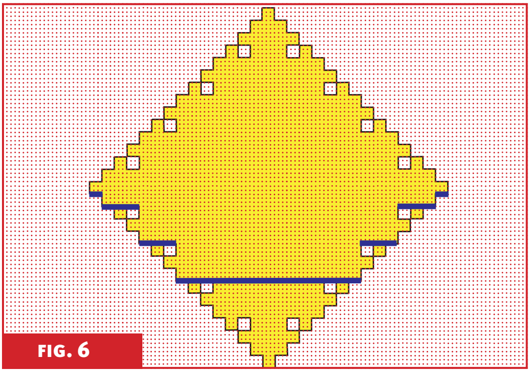


FIG. 6

Como podemos notar pela FIGURA 6, para verificar se a figura limite caberá na folha, devemos somar duas vezes o comprimento dos segmentos de cada figura obtida e o comprimento do primeiro segmento:

$$1+2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)$$

Então, devemos verificar o que acontece quando somamos os infinitos termos da P. G. que está entre parênteses. Novamente, antes de apresentar a expressão que fornece esta soma, peça para que eles façam aproximações utilizando uma calculadora.

Fechamento

Acreditamos que o professor já tenha verificado antes do começo da Etapa 2 se todos os alunos conseguiram obter a figura desejada após o quarto passo. Porém, antes de começar a discussão dos resultados obtidos no experimento, confira se todos os alunos obtiveram a figura correta.

Construa a tabela 1 na lousa e, com o auxílio dos alunos, complete-a. Logo que acabar de completá-la, comece a responder às perguntas feitas na Folha do Aluno, seguindo os raciocínios a seguir e os apresentados na Etapa 2.

Área da figura

Para a área, o professor deve encontrar a P. G. que descreve seu acréscimo nos passos e, com isso, calcular seu valor após o quarto e quinto passos com os alunos. Mostre para eles que a área é dada pela soma de termos de uma P. G. juntamente com a área do primeiro passo, de acordo com o raciocínio feito anteriormente.

Deste modo, para encontrar a área quando repetimos o processo indefinidamente, devemos encontrar a soma infinita dos termos desta P. G. Explique que, apenas quando $-1 < q < 1$, como nosso caso, há uma expressão para a soma infinita dos termos de uma P. G. Deduza-a, de acordo com os passos que seguem:

1. A soma dos termos de uma P. G. é dada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

   Logo, se multiplicarmos esta soma pela razão q da P. G. ficamos com

$$q \cdot S_n = q \cdot a_1 + q \cdot a_2 + q \cdot a_3 + \ldots + q \cdot a_n.$$

2. Agora, lembrando que também podemos obter o n-ésimo termo por $a_n = a_{(n-1)} \cdot q$, temos

$$\begin{aligned} q \cdot S_n &= \\ &= q \cdot a_1 + q \cdot a_2 + q \cdot a_3 + \ldots + q \cdot a_n = \\ &= a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_{(n+1)}. \end{aligned}$$

3. Assim, se subtrairmos S_n e $q \cdot S_n$, obteremos:

$$\begin{aligned} (1-q) \cdot S_n &= a_1 - a_{(n+1)} = \\ &= a_1 - q_q^{n \cdot a} = a_1 \cdot (1 - q^n) \end{aligned}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)}$$

Para atingir a expressão desejada, basta considerar que, quando $-1 < q < 1$, temos que, à medida que n cresce, o valor de q_n se aproxima cada vez mais de zero, isto é, para n suficientemente grande, q_n está muito próximo de zero. Dizemos, com isso, que o limite de q_n é zero quando n cresce ilimitadamente.

* *Para explicar $q_n \to 0$, faça uso da elucidação feita para o perímetro.*

4. O limite de $1 - q^n$ é 1 e o limite de

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)}$$

é

$$S = \frac{a_1}{(1-q)}.$$

Com isso:

Soma infinita dos termos de uma P. G. de razão $-1 < q < 1$,

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ uma P. G. de razão $-1 < q < 1$. A soma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ é dada por

$$S = \frac{a_1}{(1-q)}.$$

Agora, como temos o primeiro termo a_1 e a razão q, a soma da P. G. é igual a

$$\frac{\left[4\cdot\left(\frac{1}{9}\right)\right]}{\left(1-5\cdot\left[\frac{1}{9}\right]\right)}=\frac{\left(\frac{4}{9}\right)}{\left(1-\left[\frac{5}{9}\right]\right)}=\frac{\left(\frac{4}{9}\right)}{\left(\frac{4}{9}\right)}=1,$$

ou seja, a área total acrescentada se aproxima de 1. Deste modo, lembrando que a P. G. começa a partir do segundo passo, devemos somar com o resultado obtido acima a área do quadrado inicial. Com isso, temos que a área total da figura é igual a $1+1=2$.

A figura caberá na folha?

Como visto na ETAPA 2, para verificar se a figura limite caberá na folha, devemos somar duas vezes o comprimento dos segmentos de cada figura obtida e o comprimento do primeiro segmento:

$$1+2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right).$$

A soma que está entre parênteses é a soma de uma P. G. com o primeiro termo $a_1=\frac{1}{3}$ e razão $q=\frac{1}{3}$.

Com isso:

$$1+2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)=1+2\cdot\left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)}\right]$$

$$1+2\cdot\left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)}\right]=1+\frac{2\cdot 1}{2}=1+1=2$$

Se o aluno estiver usando a folha pontilhada do Anexo, onde cada unidade corresponde a 8,1 cm, teremos que 2 corresponde a $2 \cdot 8,1 = 16,2\,\text{cm}$ e, portanto, se repetíssemos o processo indefinidamente, a figura caberia na folha pontilhada.

* *A distância entre os pontos da folha pontilhada é de 0,3 cm. Deste modo, 28 pontinhos, que é a nossa unidade, equivalem a 8,1 cm.*

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autoras
Claudina Izepe Rodrigues,
Eliane Quelho Frota Rezende e
Maria Lúcia Bontorim de Queiroz

Coordenação de redação
Rita Santos Guimarães

Redação
Thaisa Aluani

Revisores
Matemática
Antônio Carlos Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara de Oliveira

Fotógrafo
Augusto Fidalgo Yamamoto

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL