Matemática Multimídia

GEOMETRIA
E MEDIDAS

Guia do professor

Experimento

O quadrado de Koch

Objetivos da unidade

1. Estudar Progressões Geométricas, explorando alguns aspectos de um fractal;
2. Introduzir a soma infinita dos termos de uma Progressão Geométrica.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

O quadrado de Koch

Guia do professor

Sinopse

Ao fazer os primeiros passos da construção para a formação do fractal que denominamos Quadrado de Koch, os alunos tentarão identificar os padrões que seguem o perímetro e a área das figuras obtidas. Assim, descobrirão Progressões Geométricas e farão análises sobre seu comportamento.

Conteúdos

- Sequência, Progressão Geométrica;
- Sequência, Soma de Progressões Geométricas.

Objetivos

1. Estudar Progressões Geométricas, explorando alguns aspectos de um fractal;
2. Introduzir a soma infinita dos termos de uma Progressão Geométrica.

Duração

Uma aula dupla.

Matemática Multimídia

Introdução

A palavra *fractal*, criada por Benoit Mandelbrot em 1975, é originária do latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo correspondente *frangere* significa fragmentar, quebrar. Os fractais podem apresentar uma infinidade de formas diferentes, não existindo uma definição consensual. Contudo, muitos conjuntos considerados fractais têm alguma forma de autossemelhança, ou seja, possuem partes que são réplicas (em escalas menores) da sua própria figura. Além disso, muitos fractais de interesse são definidos de um modo bastante simples, por exemplo, recursivamente.

Muitos fenômenos e formas irregulares, como nuvens, montanhas, turbulências, árvores, crescimento de populações, vasos sanguíneos, entre outros na natureza, podem ser estudados e descritos utilizando modelos com estruturas fractais e teoria da geometria fractal.

A geometria fractal está relacionada à Teoria do Caos, com suas irregularidades. Entretanto, a teoria dos fractais veio trazer ordem e padrões para o que antes era considerado imprevisível e caótico. Podemos dizer que a geometria fractal forneceu certa ordem ao caos, podendo ser utilizada para descrever diversos fenômenos da natureza para os quais as geometrias tradicionais não podem ser utilizadas.

Existem muitas figuras consideradas fractais, por exemplo, o triângulo de Sierpinski, que pode ser obtido a partir de uma região triangular equilátera. Dessa região retiramos a região triangular central cujos vértices são os pontos médios do triângulo inicial, restando três regiões triangulares. Em cada uma dessas regiões triangulares restantes, repetimos o processo. Refazemos indefinidamente este procedimento e o triângulo de Sierpinski é a figura limite desse processo.

Nas figuras abaixo estão representados os seis primeiros passos para a construção do triângulo de Sierpinski. Enfatizamos que o triângulo de Sierpinski é o limite e não qualquer um dos passos finitos da construção.

Uma característica importante do triângulo de Sierpinski é a autossemelhança.

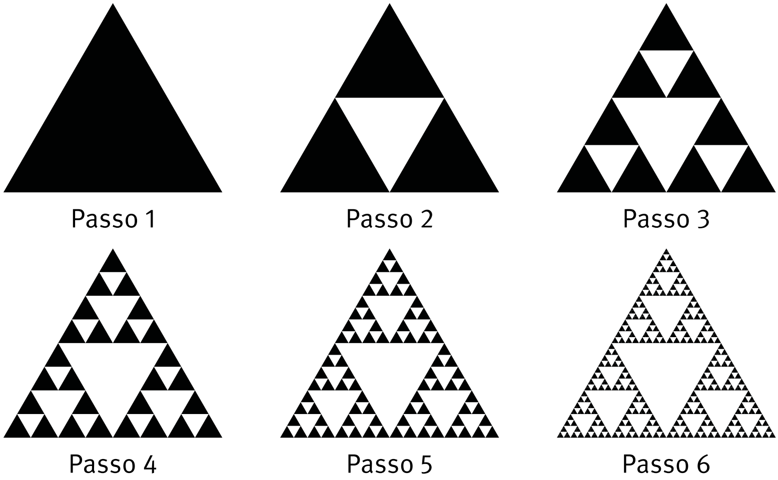

FIG. 1 *Triângulo de Sierpinski.*

Outro exemplo famoso de fractal é o conjunto de Mandelbrot, que aparece representado na figura que segue.

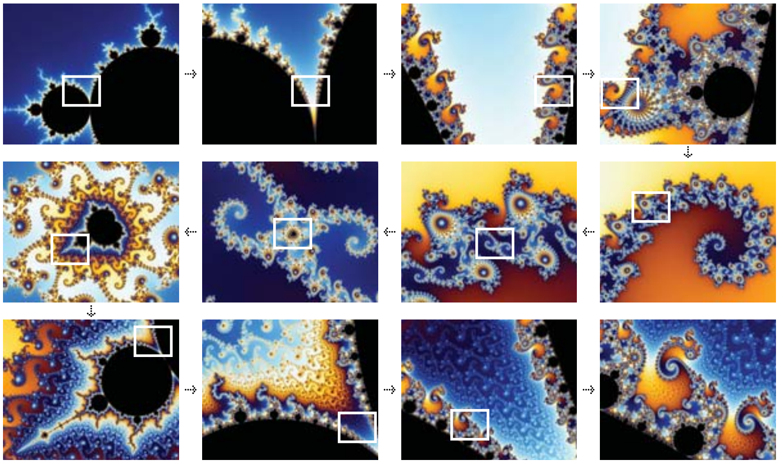

FIG. 2 *Conjunto de Mandelbrot.*

Dentro do conjunto de Mandelbrot há réplicas do conjunto infinitamente: em cada figura tem um quadrado em destaque e uma ampliação dessa região aparece na figura seguinte. (Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Mandelbrot)

Apesar de o uso de fractais não ser muito comum em sala de aula, é possível, desde que sejam respeitados os níveis e a necessidade de cada série, serem ensinados ainda no Ensino Fundamental. Os conceitos de área, perímetro, formas geométricas, sequências e séries, por exemplo, estão presentes nas formas fractais também. Em especial, no Ensino Médio, os fractais podem contribuir para uma introdução informal aos conceitos de limite e convergência.

Motivação

O ensino de Matemática e de outras áreas em geral deve incorporar atividades inovadoras e considerar a realidade do aluno. Propiciando aos alunos o conhecimento de fenômenos que ocorrem na natureza, apresentando a eles exemplos adequados e associando esses exemplos aos conteúdos a serem trabalhados, contribuímos para que o aluno tenha um primeiro contato com determinados conceitos matemáticos de modo mais significativo. Além disso, a Matemática pode contribuir para uma melhor compreensão, percepção e entendimento de fenômenos da natureza.

Acreditamos, assim, que trabalhar conteúdos a partir de exemplos encontrados na natureza, estimulando a criatividade e o raciocínio lógico, motiva os alunos e os auxiliam na compreensão desses conteúdos e conceitos matemáticos.

Em qualquer nível de ensino, o envolvimento com fractais traz consigo diversão, motivação e prazer estético pelas belas formas e cores que podem apresentar. O que se tem feito no Ensino Básico é o trabalho com exemplos geométricos de fractais. Podem ser utilizados recursos de informática, o que promove ao aluno concentração e melhor visualização para o entendimento das situações apresentadas.

O experimento

Comentários iniciais

Dentre os muitos exemplos de fractais, escolhemos o Quadrado de Koch para este experimento porque é simples de ser aprendido e serve como motivação para muitas outras atividades que podem ser propostas. Apresentaremos algumas delas no final deste texto.

A curva de Koch, da qual originou o famoso “Floco de Neve de Koch”, foi apresentada pelo matemático sueco Helge von Koch em 1904. A idéia da formação desta curva inspirou outras construções análogas como, por exemplo, a curva utilizada para construir o Quadrado de Koch que veremos na Etapa 1 deste experimento. A formação do Floco de Neve de Koch está apresentada em Variações.

Etapa 1 **Os Primeiros Passos da Construção do Quadrado de Koch**

O objetivo desta etapa é a construção, com lápis e régua, dos primeiros passos do fractal *Quadrado de Koch*. Com essa construção, exemplificaremos como é que vai se formando um fractal, desde o seu início.

Veja que o primeiro passo do fractal em questão é, simplesmente, um quadrado. A segunda figura é obtida ao se fracionar cada lado do quadrado em três partes iguais e acrescentar, a partir de cada parte intermediária, um novo quadrado de lado igual a esta parte, ou seja, medindo $\frac{1}{3}$ do lado do quadrado inicial.

Esse procedimento deve ser repetido em cada novo segmento obtido após acrescentar os novos quadrados. Nesta etapa, cada segmento obtido terá como medida, portanto, $\frac{1}{9}$ da medida do lado do quadrado inicial. A partir daí, esse procedimento é refeito em todos os segmentos obtidos nas figuras, e assim por diante. As figuras que seguem mostram os primeiros passos para a formação de um Quadrado de Koch:

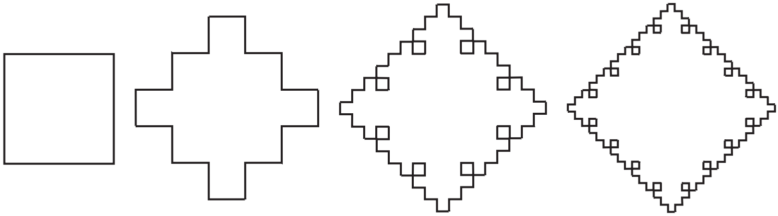

FIG. 3

O Quadrado de Koch é a curva limite quando repetimos o processo indefinidamente.

Considerando o lado do quadrado inicial como uma unidade, os alunos devem calcular o perímetro da figura e a área acrescentada em cada passo, completando a Tabela 1 abaixo:

Passos	**Comprimento dos segmentos**	**Perímetro da figura**	**Área acrescentada**
1	1	4	0
2	$\frac{1}{3}$	$500 \cdot \frac{1}{27}$	$4 \cdot \frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{9}$	$100 \cdot \frac{1}{9}$	$20 \cdot \frac{1}{81}$
4	$\frac{1}{27}$	$500 \cdot \frac{1}{27}$	$100 \cdot \frac{1}{729}$
5			

TABELA 1

Etapa 2 **Análise dos dados**

Nesta etapa, após análise dos dados obtidos na Tabela 1, mostre aos alunos, através de questionamentos, que os números, a partir da terceira coluna da Tabela 1, obedecem a certo padrão algébrico:

- Na terceira coluna, cada número, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por $\frac{1}{3}$.
- Na coluna dos perímetros, cada número, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por $\frac{5}{3}$.
- Na coluna áreas acrescentadas, cada número, a partir do terceiro, é igual ao anterior multiplicado por $\frac{5}{9}$.

Esse é um bom momento para identificar Progressões Geométricas ou mesmo introduzir este conceito.

Definição

Uma *Progressão Geométrica* (P.G.) é uma sequência de números reais não nulos em que o quociente entre um termo qualquer, a partir do segundo, e o termo precedente, é constante. Essa constante é chamada razão da Progressão Geométrica.

Termo Geral de uma P.G.

Consideremos uma Progressão Geométrica com razão $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ com razão q. São válidas as seguintes relações:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

De modo geral, vale: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$,ou seja,

Definição

O n-ésimo termo ou termo geral de uma Progressão Geométrica com razão q é dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Os alunos devem, então, identificar que tipo de sequência se observa em cada coluna da tabela e determinar o termo seguinte. A partir daí, eles poderão descobrir qual é o termo geral de cada uma delas.

É importante observar que os termos da coluna comprimento dos segmentos formam uma P.G. cujo n-ésimo termo é $a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ e a razão é $q = \frac{1}{3}$. Com esta razão, à medida que n cresce, o valor de a_n, positivo, vai se tornando cada vez menor, aproximando-se de zero. Neste caso, dizemos que o limite de a_n é zero quando n cresce ilimitadamente. O limite dos comprimentos dos segmentos, quando n cresce ilimitadamente, é zero.

Dessa forma, na coluna *perímetro da figura*, é possível identificar uma P.G. cujo n-ésimo termo é $a_n = 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$ a razão é $q = \frac{5}{3}$. Ao contrário do caso anterior, a razão sendo maior do que 1, à medida que n cresce, o valor de a_n vai se tornando cada vez maior, crescendo ilimitadamente, ou seja, o perímetro das figuras cresce ilimitadamente.

No caso da coluna *área acrescentada*, a partir do segundo passo, a P.G. obtida tem o primeiro termo $a_1 = \frac{4}{9}$ e a razão $q = \frac{5}{9}$, portanto, seu termo geral é $a_n = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$. Observe que a área da n-ésima figura é a soma da área do quadrado inicial, que é igual a 1, com os respectivos $n - 1$ termos da P.G., que representam as áreas acrescentadas. Para determinar essa área para um n qualquer, precisamos saber como calcular a soma dos n primeiros termos de uma P.G.

Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica

Consideremos a P. G. dada pelos termos: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ com razão q. A soma dos n primeiros termos desta P.G. é dada por

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q},$$

cuja demonstração está apresentada no texto do experimento.

Lembrando que na coluna *área acrescentada* o primeiro termo da sequência corresponde à Figura 2, a área da n-ésima figura para um n qualquer é, então, dada por

$$1 + \frac{4}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2}}{1 - \frac{5}{9}}.$$

Fechamento

É mais proveitoso que os resultados obtidos pelas duplas de alunos sejam analisados e discutidos com a classe toda para que todos possam visualizar a tabela na lousa feita pelo professor.

Após a análise dos resultados, conduza os alunos à reflexão: o que acontece com as áreas quando o processo é repetido indefinidamente? Elas se aproximam de algum número? Para responder, é preciso saber o que podemos afirmar sobre os valores S_n quando n cresce indefinidamente.

Para uma P.G. $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ com razão q, $-1 < q < 1$, a potência q^{n-1} se aproxima de zero, o que leva $S_n = \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$ se aproximar de $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Se $q \geqslant 1$ ou $q \leqslant -1$, os valores S_n crescem ilimitadamente, em valor absoluto, à medida que n cresce indefinidamente.

Assim, respondendo à pergunta, no caso da área, a razão da P.G. correspondente é $q = \frac{5}{9}$, $-1 < q < 1$, e, portanto, os valores das áreas se aproximam de

$$1 + \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{5}{9}} = 1 + 1 = 2$$

unidades de área (lembre-se de que o primeiro termo da P.G. é $a_1 = \frac{4}{9}$).

Observamos que para solucionar a última questão, “A figura limite, quando o processo é repetido indefinidamente, caberia na Folha Pontilhada?”, foi preciso também utilizar este conteúdo para calcular a soma infinita de uma P.G.

Observação

Também seria interessante guiar o aluno a observar que existe uma relação entre uma P.G. e sua função exponencial correspondente.

Numa P.G. $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ com razão q, vale a relação

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

No caso em que $q > 0$ e $q \neq 1$, a função que associa a cada número natural $n (n \geqslant 1)$ o valor a_n é a restrição aos números naturais da função exponencial $a(x) = a_1 \cdot q^{x-1}$. Assim, pensando em uma Progressão Geométrica como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n acima, observamos que o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial.

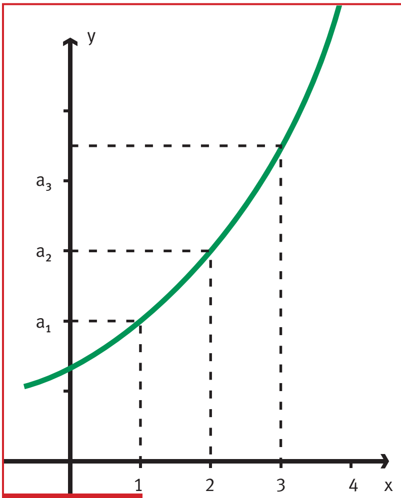

FIG. 4

$a(x) = a_1 \cdot q^{x-1}$,
$q > 1, a_1 > 0$

Note que o gráfico da função dada por $f(x) = a_1 \cdot q^{x-1}$ é a translação à direita de uma unidade do gráfico da função exponencial $g(x) = a_1 \cdot q^x$.

Sugestão ao professor

Existem diversos programas de Geometria Dinâmica em que podem ser explorados fractais. Em particular, podem ser encontradas informações sobre o programa igeom em [Brandão].

Com o uso de Progressões Geométricas, podem também ser trabalhados problemas relacionados à matemática financeira.

Variações

No texto, citamos dois outros fractais, o *Triângulo de Sierpinski* e o *Floco de Neve de Koch*. É possível fazer um estudo semelhante ao do experimento na construção dos primeiros passos para a formação desses fractais. Apresentamos a seguir um modelo para o *Floco de Neve de Koch*:

Floco de Neve de Koch
Na construção dos primeiros passos, iniciamos com um triângulo equilátero. A seguir, fracionamos cada um de seus lados em três partes iguais e acrescentamos, a partir de cada parte intermediária, um novo triângulo equilátero de lado igual a esta parte, ou seja, medindo $\frac{1}{3}$ da medida do lado do triângulo inicial.

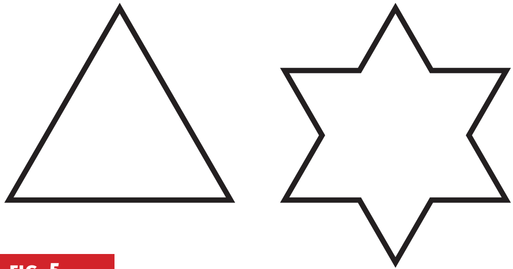

FIG. 5

Esse procedimento deve ser repetido em cada segmento obtido nesse passo.

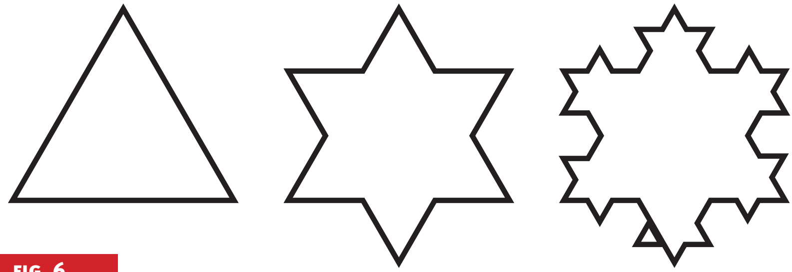

FIG. 6

O fractal correspondente a essa construção é a curva limite quando repetimos o processo indefinidamente.

Bibliografia

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal: para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BRANDÃO, Leônidas de Oliveira. **Algoritmos e Fractais com programas de GD**. Revista do Professor de Matemática. São Paulo, n. 49, p. 27-34, 2002.

SALLUM, Élvia Mureb. **Fractais no ensino médio**. Revista do Professor de Matemática. São Paulo, n. 57, p. 1-8, 2005.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio, Vol 2, Coleção do Professor de Matemática**, (3a Edição). Rio de Janeiro: SBM, 2000.

VELOSO, Eduardo. Geometria: Temas Actuais. Materiais para professores. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 2000.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

AUTORAS
Claudina Izepe Rodrigues,
Eliane Quelho Frota Rezende e
Maria Lúcia Bontorim de Queiroz

REVISORES
Matemática
Antônio Carlos Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

PROJETO GRÁFICO E ILUSTRAÇÕES TÉCNICAS
Preface Design

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

MATEMÁTICA MULTIMÍDIA
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL