Matemática Multimídia

ANÁLISE DE DADOS
E PROBABILIDADE

Guia do professor

Experimento

Jogo dos divisores

Objetivos da unidade

1. Explorar através de um jogo de dados os seguinte elementos: pensamento estratégico, cálculo de probabilidade e construção de gráficos de frequência.

UNICAMP

FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Jogo dos divisores

Guia do professor

Sinopse

O experimento envolve três dados cujas faces são números naturais. Entre dois dados é possível obter um conjunto de divisores comuns, que, no jogo, equivalem a pontos. A partir do lançamento simultâneo dos dados, o aluno é levado a decidir qual par é o melhor, ou seja, com qual par de dados é possível conseguir o maior número de divisores em um menor número de jogadas.

Conteúdos

- Conjunto, Lógica e Números: Números Primos, Divisibilidade;
- Probabilidade: Análise de Jogos;
- Estatística: Interpretação de Gráficos e Dados.

Objetivos

1. Explorar através de um jogo de dados os seguinte elementos: pensamento estratégico, cálculo de probabilidade e construção de gráficos de frequência.

Duração

Uma aula dupla.

Introdução

A probabilidade é um tópico importante da Matemática que lida com o conceito de incerteza. Utilizamos a probabilidade para modelar experimentos ou observações cujo resultado não conhecemos com precisão. Para sua formalização, utilizamos o conceito de *experimento* (ou observação) *aleatório*, que é qualquer experimento cujo resultado não é conhecido exatamente. Alguns exemplos de experimento aleatório podem ser o resultado do próximo jogo de seu time, as faces observadas em dois lançamentos de um dado, a quantidade de etnias indígenas existentes no Brasil em 1500 etc.

Chamamos de *espaço amostral* o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório. No primeiro exemplo, o espaço amostral poderia ser $\Omega_1 = \{\text{Vitória, Empate, Derrota}\}$ ou um conjunto numérico representando o saldo de gols marcados pelo seu time. No segundo exemplo, denotando por (i, j) o resultado i do primeiro lançamento e o resultado j do segundo, o espaço amostral pode ser

$$\Omega_2 = \{(i,j) : 1 \leqslant i,j \leqslant 6\} = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), (2,2), \ldots, (6,6)\}.$$

Por fim, no último exemplo, o espaço amostral pode ser o conjunto dos números naturais, $\Omega_3 = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Denominamos evento qualquer subconjunto do espaço amostral. Dessa forma, seguindo os exemplos anteriores, podemos dizer dos eventos que:

$$A = \text{“o seu time não perde o próximo jogo”} = \{\text{Vitória, Empate}\}$$

$$B = \text{“segundo lançamento é 2”} = \{(1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\}$$

$$C = \text{“pelo menos 200 etnias”} = \{200, 201, 202, \ldots\}$$

Dois eventos de um experimento aleatório são chamados de *mutuamente exclusivos* se eles não puderem ocorrer simultaneamente. No exemplo dos lançamentos do dado, os eventos B e

$$D = \text{“a soma das faces é 9”} = \{((3,6), (4,5), (5,4), (6,3))\}$$

são *mutuamente exclusivos*, pois não podem ocorrer simultaneamente.

Probabilidade é também um conceito fortemente relacionado com informação: a probabilidade de um evento representa a chance de este evento acontecer de acordo com a informação disponível ao observador. Para estar bem definida, uma probabilidade deve satisfazer certas regras.

Definição

Dizemos que P é uma função de *probabilidade* definida em um conjunto de eventos associados ao espaço amostral Ω se:

1. $0 \leqslant P(E) \leqslant 1$, para todo evento E;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ sempre que E e F forem eventos mutuamente exclusivos.

No exemplo do seu time, podemos concluir da informação disponível que, no próximo jogo,

$$P(\text{Vitória}) = 0,4$$

$$P(\text{Empate}) = 0,3$$

$$P(\text{Derrota}) = 0,3$$

Nos dois lançamentos do dado, pode ser razoável supor que todas as faces têm a mesma chance de ocorrer e, assim, nenhum par é mais provável que outro, ou seja,

$$P((i,j)) = 1/36, \text{ para todo } (i,j) \in \Omega_1.$$

Sobre as etnias indígenas no Brasil, um antropólogo voltado a tais estudos poderia afirmar, por exemplo, que $P(C) = 0,5$.

Esse quadro, contudo, pode se modificar se houver uma nova informação a respeito das probabilidades em um evento. Por exemplo, qual é a probabilidade de que seu time não perca o próximo jogo se souber que foi comprado um excelente jogador? Ou ainda, qual é a probabilidade de que o evento B ocorra se souber que ocorreu o evento

$$E = \text{“a soma das faces obtidas é 3”} = \{(1,2), (2,1)\}\ ?$$

O antropólogo Darcy Ribeiro estima que em 1957 havia 150 etnias indígenas no Brasil. Conhecendo o processo de dizimação que a população indígena sofreu, poderíamos dizer que, com essa nova informação, a probabilidade de que houvesse mais de 200 etnias indígenas no Brasil em 1500 passa a ser $0,8$, por exemplo.

A atualização da probabilidade de um evento em face de uma nova informação é obtida pelo conceito de probabilidade condicional.

Definição

Sejam E e F eventos, tais que $P(F) > 0$. Definimos a probabilidade condicional de E dado F como

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

No exemplo dos lançamentos de um dado, a probabilidade de ocorrer o evento B sabendo que ocorreu o evento E, é dada pela definição anterior

$$P(B|E) = \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{P((1,2))}{P(\{(1,2), (2,1)\})} = \frac{1/36}{2/36} = \frac{1}{2}.$$

Observe que a probabilidade de o segundo lançamento ser 2, que era originalmente igual a $1/6$, passa a ser igual a $1/2$ no momento em que nos é informado que a soma das faces é 3.

Ao contrário, quando a nova informação não modifica a probabilidade original de um evento, dizemos que eles são independentes. Mais formalmente, dados dois eventos E, F, com $P(F) > 0$, dizemos que E e F são independentes se $P(E|F) = P(E)$, ou seja, da definição de probabilidade condicional, E e F são independentes se

$$P(E \cap F) = P(E)P(F).$$

Esta última equação é também válida para o caso em que $P(F) = 0$. Caso contrário, dizemos que E e F são eventos dependentes.

Motivação

Uma aplicação importante da teoria de probabilidade ocorre em processos de tomada de decisões em face a eventos que ainda não ocorreram ou cuja ocorrência é desconhecida. Por exemplo, quantos e quais recursos devem ser utilizados pelo vereador em sua próxima campanha, se ele quiser ser reeleito? Se você for viajar de avião nos próximos 20 dias, vale a pena fazer um seguro de vida? O casal recém-formado deve comprar uma casa ou um apartamento? A sua turma deve adiar o passeio programado para o dia seguinte à prova?

É claro que se o modelo probabilístico for complexo, tomar a decisão correta não é trivial. Além disso, definir o que é uma “decisão correta” depende dos critérios pessoais adotados por cada observador e dos recursos disponíveis (limitações de tempo, dinheiro etc).

No próximo passo, abordamos o problema de tomada de decisões em um experimento equiprovável: lançamento de dois dados equilibrados. O aluno deverá estabelecer um modelo probabilístico adequado e os critérios que o ajudarão a definir a melhor decisão.

O experimento

Regras do jogo

1. Cada equipe lança os três dados e escolhe dois deles;
2. A equipe marca um ponto por cada divisor comum entre os dois valores obtidos; se a equipe errar na contagem dos divisores, perde um ponto;
3. Ganha a equipe que completar 10 pontos primeiro.

Material
Três dados por grupo como na Figura 1 do Experimento.

Participantes
Grupos de 4 a 6 alunos, organizados em duas equipes de 2 a 3 jogadores.

Sugestão para o material
Professor, você pode preparar os dados previamente.

Etapa 1 **Jogue 3, escolha 2!**

Na primeira parte do experimento, o aluno deve se familiarizar com os dados e com as regras do jogo, realizando diversas partidas.

A decisão do aluno sobre o par de dados a escolher é tomada depois de lançar os três dados. Portanto, a estratégia ótima é claramente escolher o par com maior número de divisores em comum. Por exemplo, se o aluno obtiver as faces 12 (dado A – vermelho), 75 (dado B – verde) e 11 (dado C – azul), então o melhor par é o 12 – 75 que tem dois múltiplos comuns, 1 e 3, enquanto que 12 – 11 e 75 – 11 têm apenas um múltiplo em comum cada um.

Ao realizar as partidas, as equipes devem preencher a Tabela 1 com o registro dos valores obtidos em cada lançamento para cada dado, como no exemplo a seguir:

Equipe	Dado A	Dado B	Dado C	AB	AC	BC	Pontos
1	4	115	11	X	X	X	1
2	4	115	14			X	2
1	49	6	9			X	2
2	25	60	9	X		X	2
1	12	60	14		X		2
2	49	115	14			X	2
1	4	60	3	X			3
2	69	75	3	X	X	X	2
1	32	35	3	X	X	X	1
2	49	35	11	X			2

Tabela 1

Desta tabela, é possível construir alguns *gráficos de frequência*.

1. *Frequência dos valores obtidos no dado A (ou no B, ou no C)*
   Este gráfico permite verificar se há algum vício na construção do dado A: se o dado for balanceado, todas as faces deveriam sair com frequências parecidas entre si, principalmente se o número de jogadas for grande (mais de 50 lançamentos para cada dado). Isto pode ser conseguido considerando os resultados obtidos pelas duas equipes em várias jogadas. Figura 1.
2. *Frequência de cada par escolhido*
   Este gráfico permite observar quantas vezes cada par obteve uma pontuação maior, dando uma primeira indicação de qual par de dados pode ser o que tem melhor desempenho no jogo. Em caso de empate, conte uma vez cada uma das melhores opções. Figura 2.

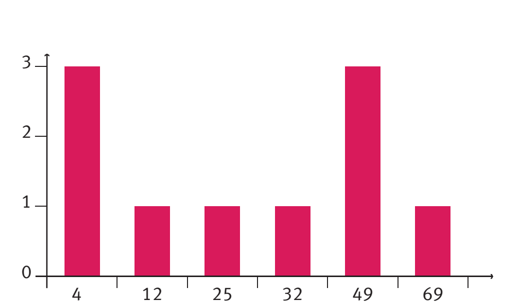

FIG. 1 *Lançamento do dado A.*

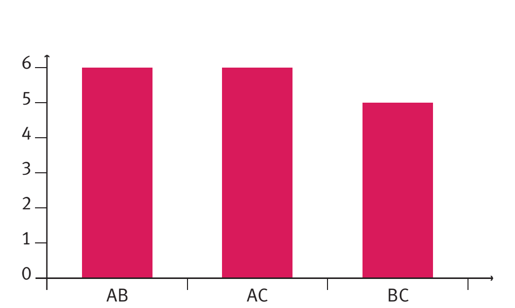

FIG. 2 *Pares escolhidos*

Etapa 2 **Aplicação de estratégias**

Nesta segunda parte, o aluno deve escolher, no começo de cada partida, qual é o par de dados que a equipe utilizará nas jogadas durante toda a partida. As equipes devem preencher a TABELA 2. Como exemplo, suponhamos que a Equipe 1 escolheu os dados A e B, e que a Equipe 2 escolheu os dados A e C.

		Equipe 1			**Equipe 2**		
		Dado A	**Dado B**	**Pontos**	**Dado A**	**Dado C**	**Pontos**
Partida 1	**1ª jogada**	69	6	2	4	3	1
	2ª jogada	49	115	2	69	48	2
	3ª jogada	32	6	2	49	14	2
	4ª jogada	12	35	1	25	48	1
	5ª jogada	32	60	3	32	48	5

TABELA 2

Desta tabela, é possível construir o gráfico de frequências dos pontos obtidos para os pares de dados escolhidos, como na FIGURA 3.

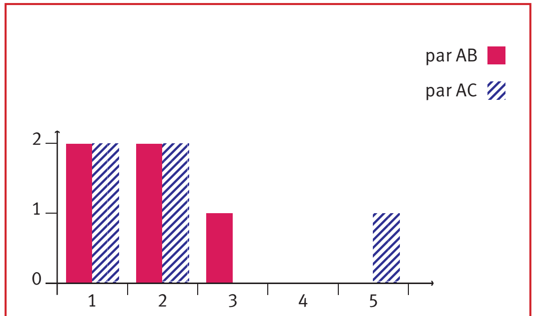

FIG. 3

No exemplo, podemos observar que o par AC teve melhor desempenho, já que obteve um número mais alto de pontos em uma rodada.

Se o grupo realizar mais jogadas, é interessante que adicionem a informação, continuando a tabela anterior e fazendo gráficos de frequência que permitam decidir se a escolha do par foi adequada.

As equipes podem trocar o par de dados a cada nova partida. Com os resultados de todas as partidas jogadas por todas as equipes da sala, o professor pode formar a seguinte tabela de frequências para o número de vitórias de cada par, em função de seu oponente. FIGURA 4.

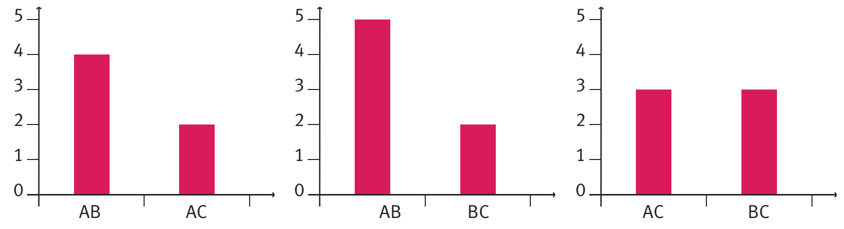

FIG. 4 *Número de vitórias*

Proposta de fechamento

A proposta apresentada no Fechamento é o cálculo das probabilidades envolvidas no jogo.

A Tabela 3, 4 e 5 do Experimento mostra as possíveis pontuações para cada par de dados. Sugerimos que os alunos preencham a tabela para começar a sistematizar a informação do problema.

Para cada par da dados, as Tabelas 3, 4 e 5 mostram a função de probabilidade de cada pontuação, para todos os pares de dados. Da mesma forma, para cada par de dados, é possível fazer algumas análises da função de probabilidade dos pontos. Aqui propomos algumas perguntas para os alunos.

1. Obtenha a média de pontos de cada par.

Média de pontos para AC $=$

$$= 1 \times \frac{23}{36} + 2 \times \frac{10}{36} + 3 \times \frac{1}{36} + 5 \times \frac{1}{36} + 6 \times \frac{1}{36} = 1{,}58$$

Média de pontos para AB $=$

$$= 1 \times \frac{16}{36} + 2 \times \frac{11}{36} + 3 \times \frac{7}{36} + 4 \times \frac{1}{36} + 6 \times \frac{1}{36} = 1{,}92$$

Média de pontos para BC $=$

$$= 1 \times \frac{18}{36} + 2 \times \frac{14}{36} + 3 \times \frac{1}{36} + 4 \times \frac{2}{36} + 6 \times \frac{1}{36} = 1{,}75$$

2. Obtenha a probabilidade de obter 3 ou mais pontos para cada par.

$$\text{para AC: } \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = 0{,}083$$

$$\text{para AB: } \frac{7}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{9}{36} = 0{,}25$$

$$\text{para BC: } \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36} = 0{,}11$$

3. Obtenha a probabilidade de obter 5 ou mais pontos para cada par.

$$\text{para AC: } \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = 0{,}056$$

$$\text{para AB: } \frac{1}{36} = 0{,}028$$

$$\text{para BC: } \frac{1}{36} = 0{,}028$$

4. Suponha que as equipes escolheram os pares AB e AC, respectivamente. Qual é a probabilidade de que em uma jogada a Equipe 1 obtenha mais pontos que a Equipe 2?

Estamos interessados nos seguintes casos:

a. Equipe 2 obtém 1 ponto e a Equipe 1 obtém 2 ou mais pontos
b. Equipe 2 obtém 2 pontos e a Equipe 1 obtém 3 ou mais pontos
c. Equipe 2 obtém 3 pontos e a Equipe 1 obtém 4 ou mais pontos
d. Equipe 2 obtém 5 pontos e a Equipe 1 obtém 6 pontos

Como os lançamentos são independentes, a probabilidade do item (a) é igual ao produto das probabilidades para cada equipe:

$P(a) =$

$P(\text{Equipe 2 obtém 1 ponto}) \times P(\text{Equipe 1 obtém 2 ou mais pontos}) =$

$$\frac{23}{36} \times \left(\frac{11}{36} + \frac{7}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}\right) = \frac{23}{36} \times \frac{20}{36} = \frac{460}{1296} = 0,36$$

$P(b) =$

$P(\text{Equipe 2 obtém 2 pontos}) \times P(\text{Equipe 1 obtém 3 ou mais pontos}) =$

$$\frac{10}{36} \times \left(\frac{7}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}\right) = \frac{10}{36} \times \frac{9}{36} = \frac{90}{1296} = 0,069$$

$P(c) =$

$P(\text{Equipe 2 obtém 3 pontos}) \times P(\text{Equipe 1 obtém 4 ou mais pontos}) =$

$$\frac{1}{36} \times \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36}\right) = \frac{1}{36} \times \frac{2}{36} = \frac{2}{1296} = 0,0015$$

$P(d) =$

$P(\text{Equipe 2 obtém 5 pontos}) \times P(\text{Equipe 1 obtém 6 pontos}) =$

$$\frac{1}{36} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{1296} = 0,0008$$

Portanto, a probabilidade de que a Equipe 1 obtenha mais pontos que a Equipe 2 é igual à soma das probabilidades anteriores: $0,36 + 0,069 + 0,0015 + 0,0008 = 0,3607$ ou, em outras palavras, $36,07\%$.

Variações

A variação que vamos propor faz uma mudança aparentemente pequena nas regras do jogo, mas resulta em uma situação nova na qual os critérios de tomada de decisão por parte dos alunos podem mudar significativamente.

Regras do jogo

1. Forme duas equipes dentro do seu grupo;
2. Em cada rodada, cada equipe escolhe um par de dados e lançam alternadamente os dois dados escolhidos;
3. A equipe marca um ponto por cada divisor comum entre os dois valores obtidos no lançamento;
4. Ganha o jogo a equipe que completar 10 pontos primeiro;

Nesta variação, a equipe decide em cada jogada qual par de dados lançar. Neste caso, a estratégia depende da situação da equipe em cada jogada da partida. Por exemplo, poderia arriscar mais (escolhendo o par AC) a equipe que estiver com menos pontuação perto do fim da partida.

É possível criar diversas variações além dessa proposta mudando apenas os critérios de marcação de pontos ou mesmo as faces de cada dado.

Bibliografia

MEYER, P. **Probabilidade: Aplicações à Estatística**. 2ª. edição. Livros Técnicos e Científicos Editora. 2003.

FELLER, W. **Introdução à teoria das probabilidades e suas aplicações**. Editora Edgard Blücher. 1976.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autora
Laura Leticia Ramos Rifo

Revisores
Matemática
José Plínio O. Santos
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL