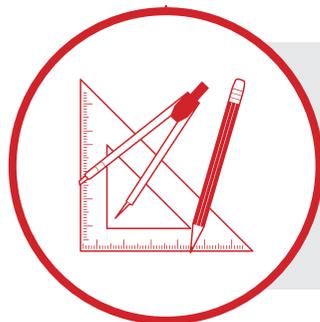




Matemática Multimídia

GEOMETRIAS  
E MEDIDAS



## O EXPERIMENTO

# Experimento

## Esqueletos no espaço

### Objetivos da unidade

1. Instrumentalizar o docente com material para o ensino de Geometria Espacial;
2. Explorar esqueletos de poliedros convexos, criando hipóteses sobre rigidez.



UNICAMP

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 



FUNDO NACIONAL  
DE DESENVOLVIMENTO  
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de  
Educação a Distância

Ministério da  
Ciência e Tecnologia

Ministério  
da Educação

Governo Federal

# Esqueletos no espaço

## O EXPERIMENTO

### **Sinopse**

Trabalhando em grupo, os alunos deverão construir seis esqueletos (vértices e arestas) de poliedros convexos. No processo de construção, os alunos perceberão que existem esqueletos de poliedros rígidos e não rígidos. Para estes, adiante, proporemos o desafio de torná-los rígidos. Neste processo, os alunos tentarão obter regras que lhes permitam explicar suas soluções.

### **Conteúdo**

Geometria Espacial: Geometria Métrica.

### **Objetivos**

1. Instrumentalizar o docente com material para o ensino de Geometria Espacial;
2. Explorar esqueletos de poliedros convexos, criando hipóteses sobre rigidez.

### **Duração**

Uma aula dupla.

### **Material relacionado**

Experimento: Cortar Cubos.



# Introdução

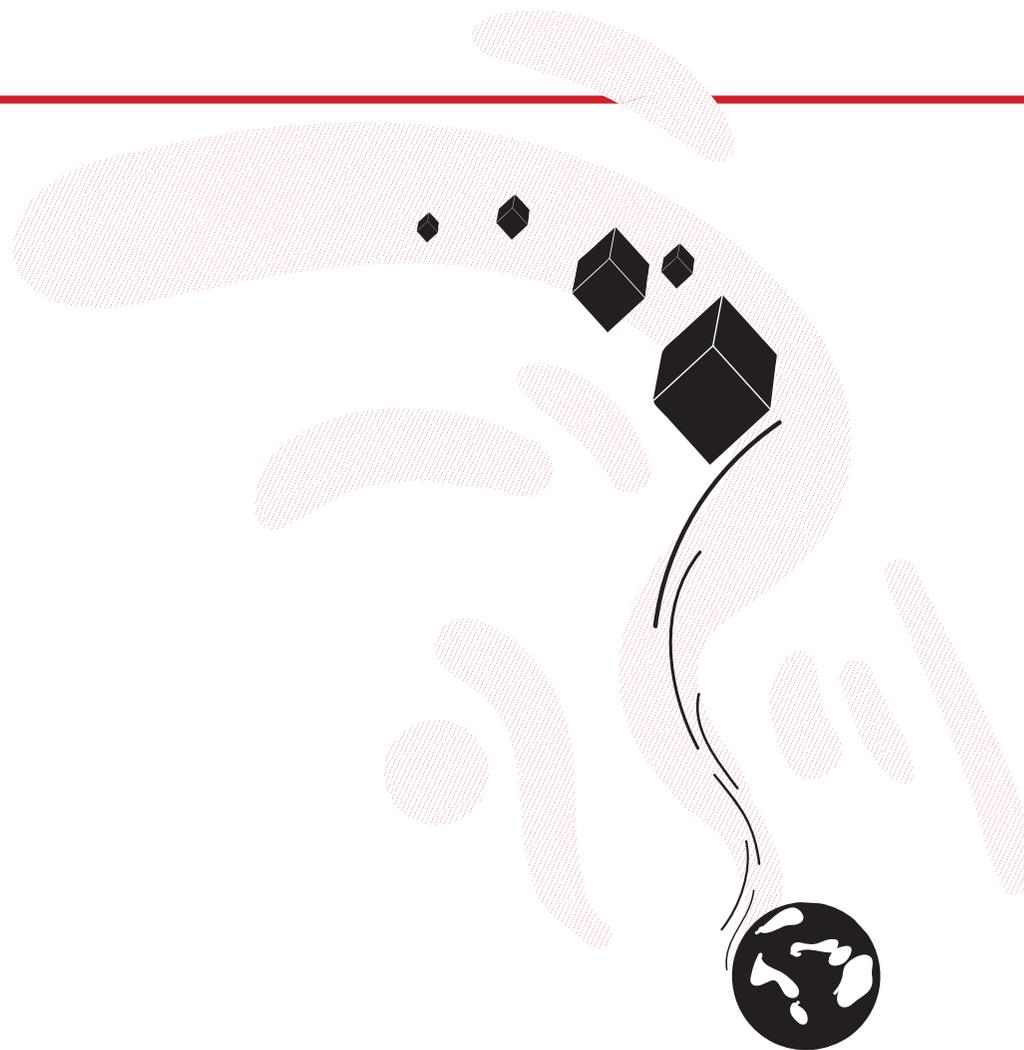
---

Nada como ter a oportunidade de visualizar conceitos que muitas vezes ficam restritos às folhas de caderno. Melhor ainda se pudermos aprender e nos divertir ao mesmo tempo, não é mesmo?

Deste experimento certamente surgirão diversas oportunidades de estudar elementos de Geometria Espacial e Plana, tudo isso a partir de um procedimento de construção bastante simples.

De antemão, é difícil dizer quais poliedros são rígidos. A resposta, contudo, pode facilmente ser obtida no GUIA DO PROFESSOR e ser usada também na construção de uma hipótese matemática sobre a rigidez de esqueletos no espaço. É essa a proposta que trazemos neste experimento. Usando garrote e varetas, diversos esqueletos de poliedros serão construídos, uns rígidos e outros flexíveis.

A resposta para o problema da rigidez pode ser obtida intuitivamente se observarmos diversas construções. Nelas, os triângulos surgem a todo momento e, como veremos, seu papel é importante para determinar a rigidez de um objeto.



# O Experimento

## Material necessário

- Garrote (usado em farmácias e hospitais);
- Varetas (nos exemplos que apresentamos, utilizamos espetinhos de churrasco como vareta);
- Tesoura;
- Estilete (faca serrilhada pode substituir o estilete);
- Régua.

\* *Traga material extra consigo, pois é possível que falte, caso os alunos cometam muitos erros durante a preparação do experimento.*



FIG. 1

## Custo dos materiais

Na TABELA 1 informamos a quantidade aproximada de material que cada grupo gastará na ETAPA 1 e na ETAPA 2. No total, precisaremos de 98 varetas de 25 cm cada (aproximadamente dois pacotes de varetas) e 0,5 m de garrote.

Para o cálculo das varetas, estabelecemos que cada aresta de cada poliedro possui 10 cm de comprimento e, para os vértices, usamos pedaços de garrote de 3 cm.

! *O número de varetas da TABELA 1 inclui também as arestas de suporte usadas na ETAPA 2.*

Esqueleto	Nº arestas	Nº vértices	Material gasto	
			Nº varetas (25 cm cada)	Garrote (3 cm)
Cubo	12	8	12	60 cm
Octaedro	12	6	6	40 cm
Dodecaedro	30	20	39	180 cm
Icosaedro	30	12	15	75 cm
Pirâmide Quadrangular	8	5	5	30 cm
Prisma Hexagonal	18	12	21	105 cm
Total			98	490 cm

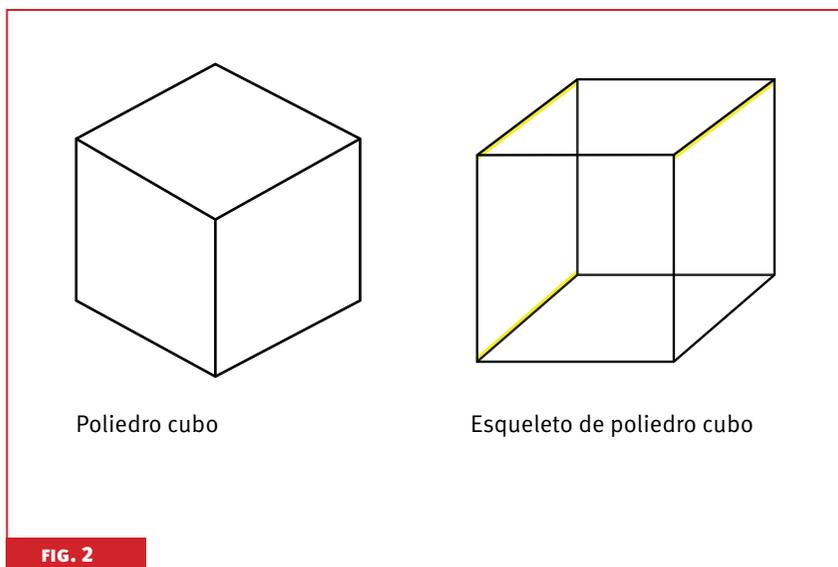
TABELA 1 Gasto mínimo de material para construção dos poliedros.

## Preparação

Divida os alunos em grupos de, no mínimo, quatro alunos e entregue para cada grupo uma FOLHA DO ALUNO, certificando-se de que todos possuem os materiais necessários para a realização do experimento.

Depois, antes de iniciar o experimento, observe com os alunos que estamos usando o termo “esqueleto” ao invés de “poliedro” e explique a diferença entre eles: o esqueleto de poliedro é o conjunto de todas as arestas e vértices de um poliedro, enquanto o poliedro é o conjunto de todas as arestas, vértices e faces.

+ *Para saber mais detalhes sobre a diferença entre poliedro e esqueleto de poliedro, veja o GUIA DO PROFESSOR!*

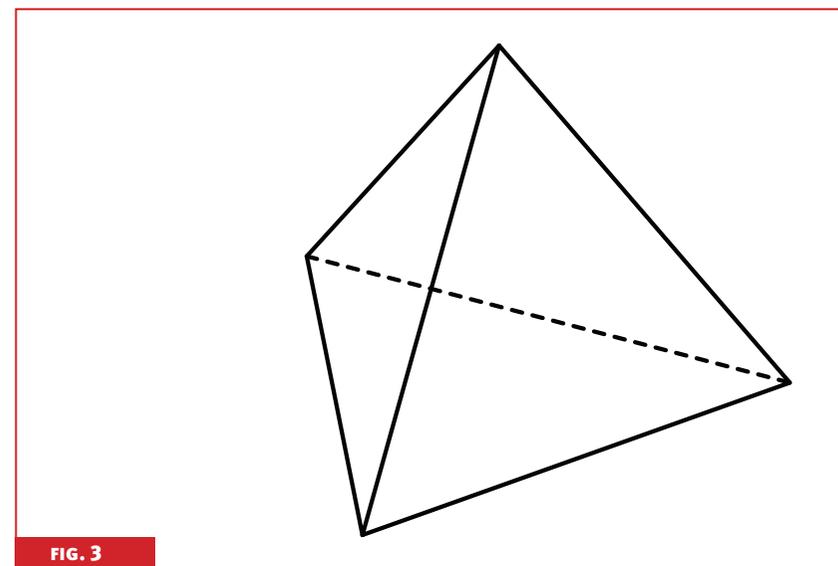


## Construção dos esqueletos

ETAPA  
1

Propomos a construção do esqueleto tetraedro como atividade de familiarização. Ele não consta na TABELA 1, pois o material necessário para construí-lo pode ser reutilizado na construção dos outros poliedros. Construa-o junto aos alunos seguindo as instruções a seguir.

### Construção do tetraedro



1. Corte dois pedaços de garrote com 3 cm para cada vértice do tetraedro e corte também pedaços de vareta com 10 cm para cada aresta.

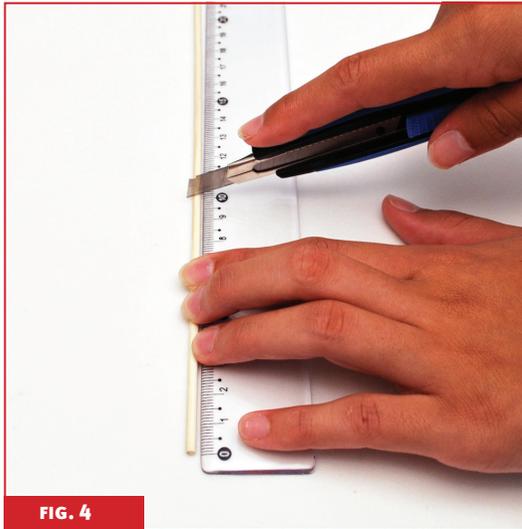


FIG. 4



FIG. 5

---

! *O número de pedaços de garrote utilizado em cada vértice depende da quantidade de arestas que nele incidem. Em outros esqueletos pode ser necessário cortar mais de dois pedaços para cada vértice.*

---

2. Para o vértice, dobre ao meio um dos pedaços de garrote e corte as pontas da dobra como na FIGURA 6.

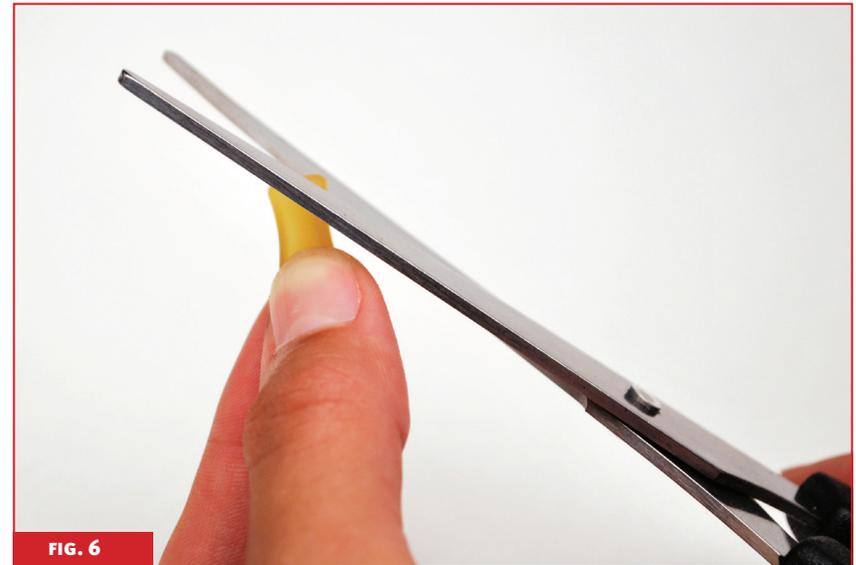


FIG. 6



FIG. 7

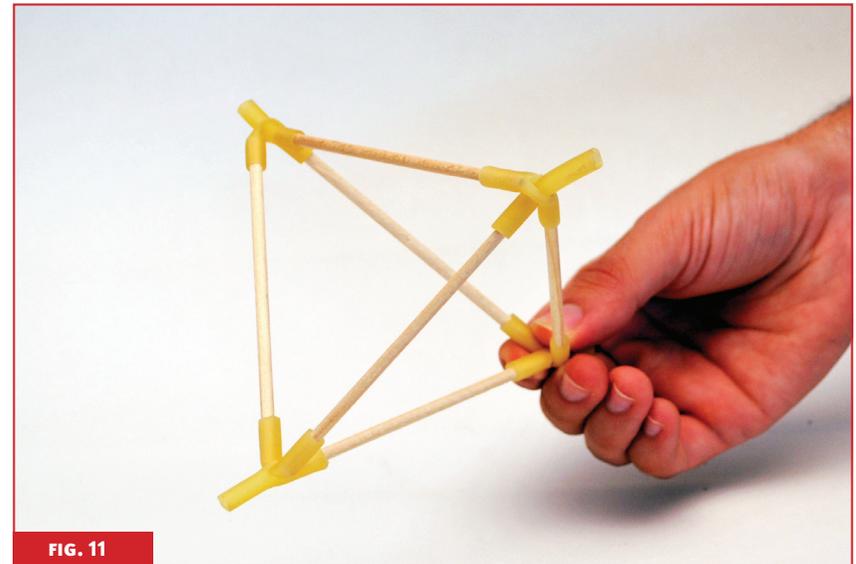
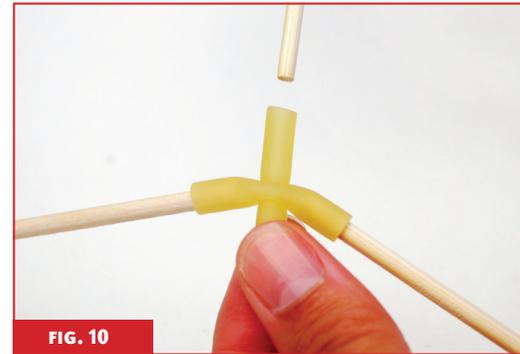
3. Passe o outro pedaço do garrote pelo buraco obtido no passo anterior, formando os vértices. Faça isso com todos os pares.



\* Peça para os alunos aproveitarem o material utilizado na construção do tetraedro para a construção dos outros poliedros.



4. Encaixe as varetas nos vértices e o tetraedro ficará pronto.



#### Construção dos outros esqueletos

Logo que os grupos terminarem a construção do tetraedro, peça-lhes que construam os objetos mostrados a seguir:

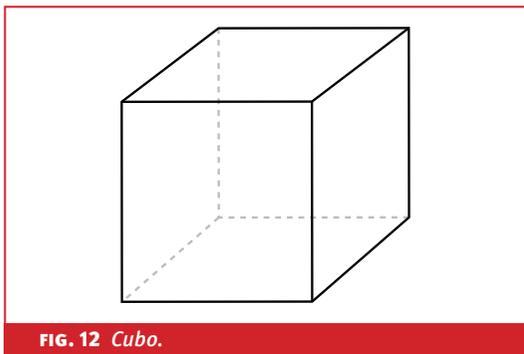


FIG. 12 *Cubo.*

\* *Incentive os alunos a tentarem descobrir quais esqueletos são rígidos antes de construí-los. É importante que eles criem hipóteses.*

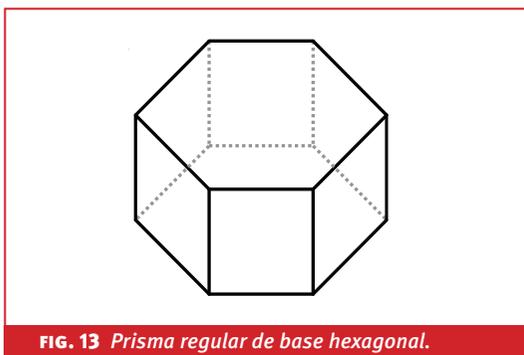


FIG. 13 *Prisma regular de base hexagonal.*

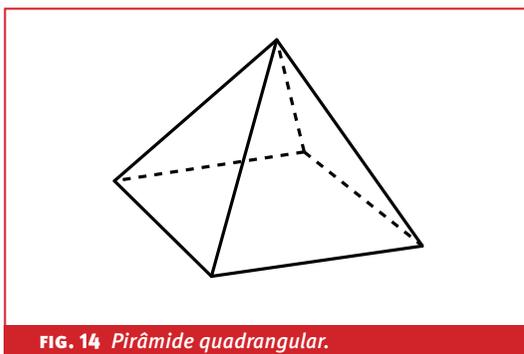


FIG. 14 *Pirâmide quadrangular.*

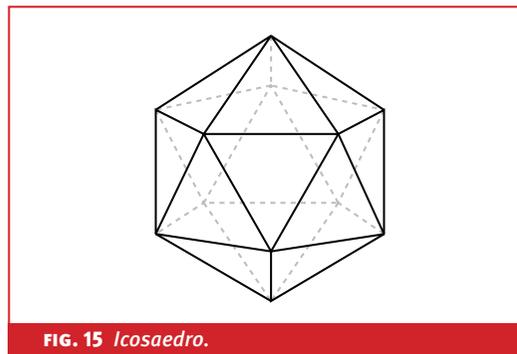


FIG. 15 *Icosaedro.*

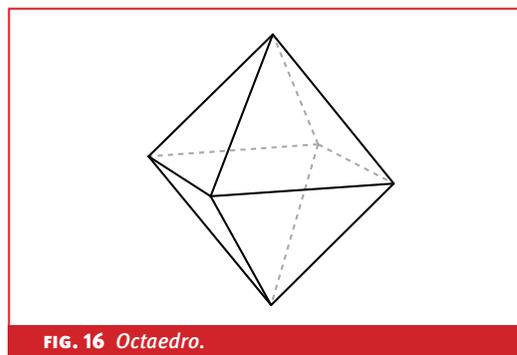


FIG. 16 *Octaedro.*

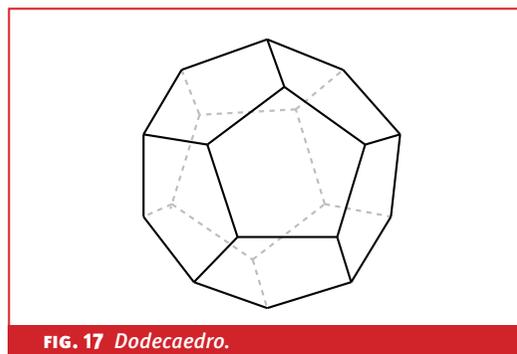


FIG. 17 *Dodecaedro.*

Antes da construção, propomos a seguinte pergunta na FOLHA DO ALUNO:

**Questão para os alunos**

Quais esqueletos são rígidos?

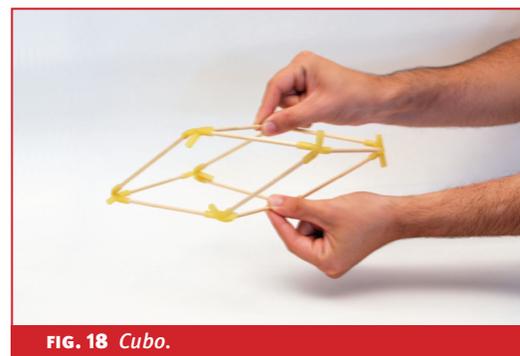
Com base nas ilustrações também presentes na FOLHA DO ALUNO, para poder construir cada esqueleto, esperamos que o aluno preveja os tipos de faces e o número de arestas por vértice de cada esqueleto

Na TABELA 2 descrevemos cada esqueleto e, em seguida, apresentamos fotos deles construídos. Dessa maneira será mais fácil auxiliar os alunos.

! *A quantidade de garrote utilizada no vértice depende da quantidade de arestas que nele incidem.*

Poliedro	Nº arestas	Nº vértices	FACES		Nº arestas por vértice
			Nº	Tipo	
Cubo	12	8	6	Quadrada	3
Octaedro	12	6	8	Triangular	4
Dodecaedro	30	20	12	Pentagonal	3
Icosaedro	30	12	20	Triangular	5
Pirâmide Quadrangular	8	5	5	1 quadrada e 3 triangulares	3 e 4
Prisma Hexagonal	18	12	8	6 quadradas e 2 hexagonais	3

**TABELA 2** Descrição dos poliedros.



**FIG. 18** Cubo.



**FIG. 19** Octaedro.



**FIG. 20** Dodecaedro.



FIG. 21 Icosaedro.

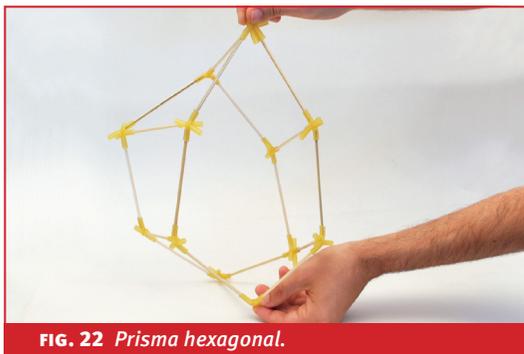


FIG. 22 Prisma hexagonal.

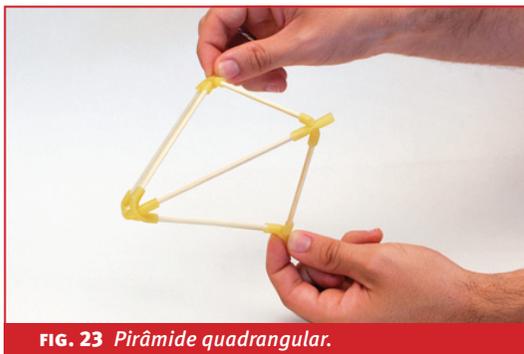


FIG. 23 Pirâmide quadrangular.

Observe que os esqueletos do cubo, do dodecaedro, da pirâmide quadrangular e do prisma hexagonal são facilmente deformáveis, ou seja, desmontam sobre o próprio peso. Já o esqueleto do octaedro e do icosaedro, assim como o do tetraedro que construímos anteriormente, são totalmente rígidos.

Peça para cada grupo comparar os objetos e observar o que faz deles rígidos ou flexíveis.

---

## Como deixar os esqueletos rígidos

---

ETAPA

2

Nesta etapa, os alunos serão desafiados a deixar os esqueletos dos poliedros rígidos e, para isso, precisarão refletir sobre as características que definem tal estado.

### Acréscimo de arestas de suporte

Temos que o triângulo é o único polígono rígido no sentido que, a cada três lados com determinado comprimento, definimos um *único* triângulo. Por outro lado, com quatro lados de determinado comprimento, podemos definir tanto um quadrado quanto um losango. Também com seis lados de mesmo tamanho, podemos definir um hexágono regular e outros irregulares.

---

+ *Para uma melhor explicação sobre a rigidez do triângulo, veja o GUIA DO PROFESSOR.*

---

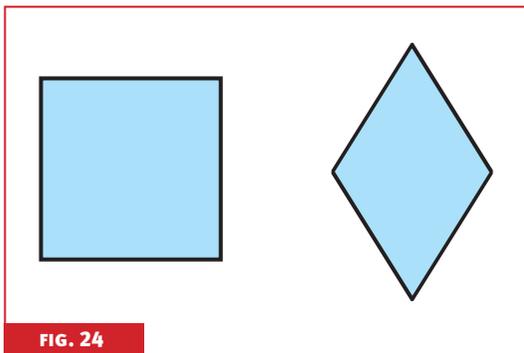


FIG. 24

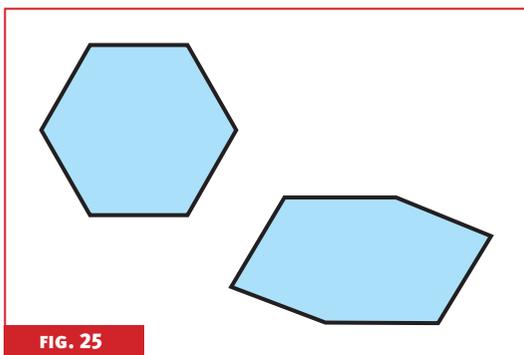


FIG. 25

Deste modo, uma maneira de tornar rígidos os esqueletos de poliedros convexos é triangularizar suas faces, pois, ao fazer isso, estamos tornando-as rígidas.

Como apresentado no GUIA DO PROFESSOR, essa condição é suficiente para poliedros convexos. No entanto, existem poliedros que não são convexos cujas faces são todas triangulares e ainda assim são poliedros flexíveis.

+ *O cálculo do comprimento das arestas de suporte se encontra no GUIA DO PROFESSOR.*

+ *Um exemplo de poliedro não convexo flexível que tenha todas as faces triangulares é o poliedro de Steffen. Para saber mais sobre ele, veja o GUIA DO PROFESSOR.*

## Fechamento

Reúna as soluções que os grupos apresentaram para cada objeto construído e verifique se eles estão realmente rígidos, tentando deformá-los de todos os jeitos possíveis. Fique atento, pois o esqueleto do cubo aparenta ficar rígido quando colocamos quatro diagonais internas, mas, na verdade, ainda assim é possível deformá-lo.

Eventualmente os alunos podem encontrar soluções não baseadas na rigidez das faces. Para obter mais informações sobre essas variações, consulte o GUIA DO PROFESSOR. Discuta com os alunos essas soluções alternativas também.

Além disso, os alunos podem acrescentar diagonais desnecessárias. Se for o caso, faça as seguintes perguntas:

### Questão para os alunos

É possível tornar um esqueleto de poliedro rígido com uma quantidade menor de varetas?

Depois de promover tal discussão, passe para as questões da ETAPA 2. Algumas das possíveis soluções são ilustradas nas fotos a seguir:

+ *É provável que os alunos não considerem a convexidade um fator relevante para a elaboração da regra. Apresente o poliedro de Steffen no GUIA DO PROFESSOR.*

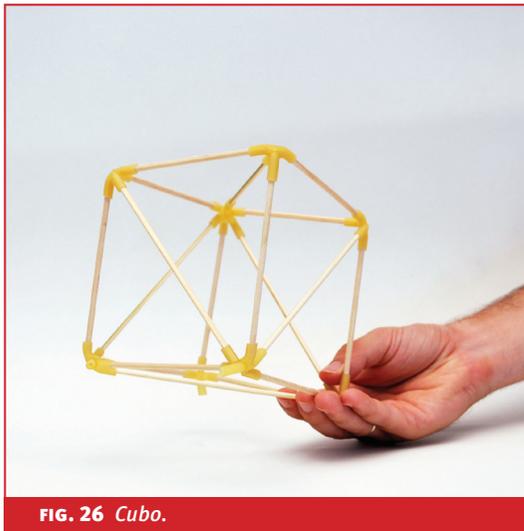


FIG. 26 *Cubo.*



FIG. 28 *Prisma hexagonal.*

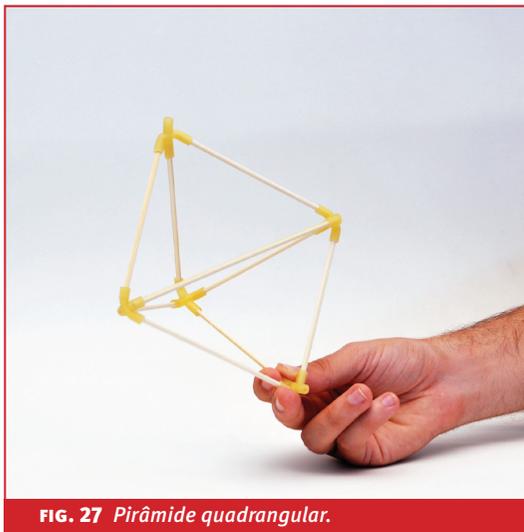


FIG. 27 *Pirâmide quadrangular.*



FIG. 27 *Dodecaedro.*

# Ficha técnica



## **AUTOR**

Cristiano Torezzan

## **COORDENAÇÃO DE REDAÇÃO**

Fabício de Paula Silva

## **REDAÇÃO**

Thaísa Aluani

## **REVISORES**

### **Matemática**

Antonio Carlos do Patrocínio

### **Língua Portuguesa**

Carolina Bonturi

### **Pedagogia**

Ângela Soligo

## **PROJETO GRÁFICO**

Preface Design

## **ILUSTRADOR**

Lucas Ogasawara de Oliveira

## **FOTÓGRAFO**

Augusto Fidalgo Yamamoto



## **UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

### **Reitor**

Fernando Ferreira Costa

### **Vice-Reitor**

Edgar Salvadori de Decca

### **Pró-Reitor de Pós-Graduação**

Euclides de Mesquita Neto

## **MATEMÁTICA MULTIMÍDIA**

### **Coordenador Geral**

Samuel Rocha de Oliveira

### **Coordenador de Experimentos**

Leonardo Barichello

## **INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)**

### **Diretor**

Jayme Vaz Jr.

### **Vice-Diretor**

Edmundo Capelas de Oliveira

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons