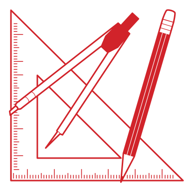
Matemática Multimídia

GEOMETRIA
E MEDIDAS

Guia do professor



Experimento

Esqueletos no espaço

Objetivos da unidade

1. Instrumentalizar o docente com material para o ensino de Geometria Espacial;
2. Explorar esqueletos de poliedros convexos, criando hipóteses sobre rigidez.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Esqueletos no espaço

Matemática Multimídia

Guia do professor

Sinopse

Trabalhando em grupo, os alunos deverão construir seis esqueletos (vértices e arestas) de poliedros convexos. No processo de construção, os alunos perceberão que existem esqueletos de poliedros rígidos e não rígidos. Para estes, adiante, proporemos o desafio de torná-los rígidos. Neste processo, os alunos tentarão obter regras que lhes permitam explicar suas soluções.

Conteúdo

Geometria Espacial: Geometria Métrica.

Objetivos

1. Instrumentalizar o docente com material para o ensino de Geometria Espacial;
2. Explorar esqueletos de poliedros convexos, criando hipóteses sobre rigidez.

Duração

Uma aula dupla.

Material relacionado

Experimento: Cortar Cubos.

Introdução

O estudo da Geometria merece uma atenção especial no Ensino Médio, principalmente a extrapolação dos conceitos de geometria plana para o espaço. Geralmente relegado aos finais dos capítulos ou finais dos livros didáticos, o tema tende a receber um tratamento analítico, com ênfase nos aspectos métricos, dando a impressão que consiste de um amontoado de fórmulas para resolver questões que parecem existir apenas em exercícios de matemática. Este experimento caminha na contramão dessas duas tendências.

Acredito que a Geometria deve ocupar um lugar central no estudo de matemática, uma vez que o desenvolvimento do pensamento geométrico, complementar ao analítico, é muito importante para a formação crítica do estudante. Ademais, o pensamento criativo em geometria exige habilidades diferentes do pensamento analítico; em particular, exige certo distanciamento do objeto de estudo: a simples descrição de um objeto demanda enxergá-lo sob diferentes pontos de vista, o que estimula o estudo das relações entre diferentes objetos, a verificação da existência de padrões, de características de validade universal etc.

O propósito do experimento é estimular os alunos a construir e explorar alguns objetos tridimensionais, com o objetivo de investigar a existência de características que os tornam rígidos ou flexíveis. Evitamos a utilização de fórmulas e preferimos enfatizar um viés qualitativo na análise do experimento. Sendo assim, no decorrer das atividades, os alunos são incentivados a criar e testar suas próprias conjecturas a respeito da rigidez de poliedros.

Neste guia, procuramos apresentar os subsídios matemáticos que dão suporte a esta atividade. Em especial, destacamos o Teorema de Cauchy, que garante que todo poliedro convexo é rígido. Discutimos também o termo esqueleto, utilizado no título do experimento, que permite a compreensão de afirmações como: o cubo é rígido, mas o esqueleto do cubo é flexível. Por fim, apresentamos a planificação do Poliedro de Steffen, um poliedro flexível, cujas faces são todas triangulares. Este poliedro não é convexo e a construção de seu esqueleto utilizando o material do experimento pode ser um desafio bastante estimulante para aos alunos.

Motivação

Embora estejamos habituados a figuras tridimensionais (afinal, vivemos num mundo tridimensional), o estudo da Geometria Espacial na escola é sempre um desafio. Parte deste desafio reside na dificuldade que os alunos têm em abstrair propriedades das figuras geométricas espaciais que, em geral, lhes são apresentadas de maneira formal pela primeira vez através de desenhos bidimensionais no livro.

Neste experimento, os alunos terão a oportunidade de construir e manipular vários esqueletos de poliedros, superando o problema da visualização e explorando propriedades que não seriam passíveis de análise através de desenhos no plano. Dessa forma, os ganhos com a realização deste experimento podem ir além das questões exploradas nas atividades. Sugerimos, por exemplo, o aproveitamento das figuras construídas para um novo estudo de relações métricas de poliedros.

O experimento

Definições e fatos históricos

Antes de abordar as questões envolvidas no experimento, vamos apresentar alguns conceitos envolvidos nesta atividade e, também, um relato dos principais fatos e personagens que fizeram parte da história do estudo sobre a rigidez de poliedros.

Utilizamos o termo *esqueleto tridimensional* (ao invés de *poliedro*) por haver uma sutil e fundamental diferença entre ambos. Um *poliedro* é uma reunião de um número finito de polígonos planos, que são denominados *faces do poliedro*, de forma que: a) cada lado de um desses polígonos, denominado aresta, é também lado de um, e apenas um, outro polígono e b) a intersecção de duas faces quaisquer ou é vazia, ou é um lado comum a duas faces, ou é um vértice do poliedro. O *esqueleto tridimensional* do poliedro consiste apenas no conjunto dos vértices e arestas do poliedro.

Do ponto de vista formal, os objetos construídos no experimento são denominados *1-esqueleto* dos poliedros. Dizemos que os vértices de um poliedro tridimensional formam o *zero-esqueleto* do poliedro. Suas arestas formam o *1-esqueleto* e suas faces formam o *2-esqueleto*, que, no caso tridimensional, coincide com o poliedro. Para simplificar a notação e nos adequar ao nível de estudo pretendido, vamos denominar simplesmente *esqueleto do poliedro* ao conjunto das arestas e vértices de um poliedro.

Para que o *esqueleto* se transforme no *poliedro*, precisamos adicionar-lhe todas as faces. Neste sentido, quando nos referimos a algum objeto construído no experimento, o correto é utilizar o termo *esqueleto*. Por exemplo, devemos dizer o *esqueleto do cubo não é rígido* ao invés de dizer o *cubo não é rígido*. Esses cuidados, que à primeira vista podem parecer pedantes, são tomados para evitar confusões conceituais. Aliás, uma das dificuldades que os matemáticos do passado tiveram para demonstrar teoremas sobre poliedros foi justamente a falta de definições precisas para os termos envolvidos.

Na sequência, passemos a discutir o conceito de rigidez, iniciando por sua definição:

Definição

Dizemos que um objeto é *rígido* se ele não puder ser deformado continuamente, de modo a se transformar em outro. Um objeto que não é rígido é denominado *flexível*.

Dizer que um objeto rígido não pode ser deformado continuamente significa dizer que tal objeto não pode ser transformado em outro sem que haja rupturas, ou seja, sem quebrá-lo. *Deformar* significa “modificar a forma”; assim, o fato de ser possível movimentar livremente um triângulo no plano ou no espaço não implica que o triângulo seja flexível. O triângulo é rígido porque só podemos transformá-lo em outro polígono se rompermos um de seus lados. Eventualmente podemos admitir que um objeto rígido possa ter duas ou mais formas estáveis que não podem ser obtidas uma da outra através de uma deformação contínua, isto é, sem quebrá-lo.

O estudo da rigidez de poliedros tem despertado o interesse de muitos matemáticos ao longo da história. Em 1766, o matemático Leonhard Euler formulou a seguinte conjectura sobre a rigidez de poliedros:

Conjectura de Euler para rigidez de poliedros

Se as faces de um poliedro forem feitas com uma chapa de metal e as arestas substituídas por dobradiças, o poliedro será rígido.

Em 1813, Cauchy demonstrou que a conjectura de Euler era verdadeira para todos os poliedros convexos.

Teorema de Cauchy para rigidez de poliedros

Todo poliedro convexo cujas faces são feitas com uma chapa de metal e cujas arestas são substituídas por dobradiças é rígido.

Embora a demonstração de Cauchy não abrangesse poliedros não convexos, acreditava-se também que todos os poliedros (convexos ou não) com faces triangulares eram rígidos. No entanto, em 1978, o matemático Robert Conelly mostrou que a conjectura de Euler era falsa, apresentando o exemplo de um poliedro cujas faces eram todas triangulares, mas o poliedro não era rígido! Tal objeto ficou conhecido como a “esfera de Conelly”.

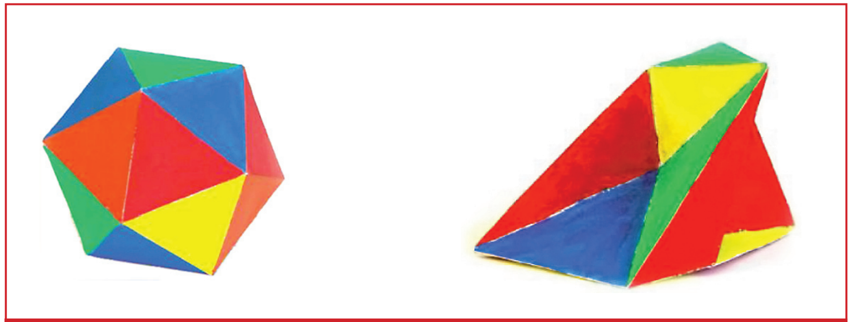


FIG. 1 *Icosaedro, um poliedro rígido, e Esfera de Conelly, um poliedro não rígido.*

A descoberta da esfera de Conelly inspirou outros matemáticos e outros resultados interessantes apareceram. Por exemplo, Klaus Steffen encontrou um poliedro flexível com apenas 14 faces triangulares e 9 vértices (Cromwell 1997, pp. 244-247); Maksimov (1995) mostrou que o poliedro de Steffen é o poliedro flexível mais simples que pode existir, cujas faces são formadas apenas por triângulos (Cromwell 1997, p. 245).

Abaixo, apresentamos a planificação do poliedro flexível de Steffen:

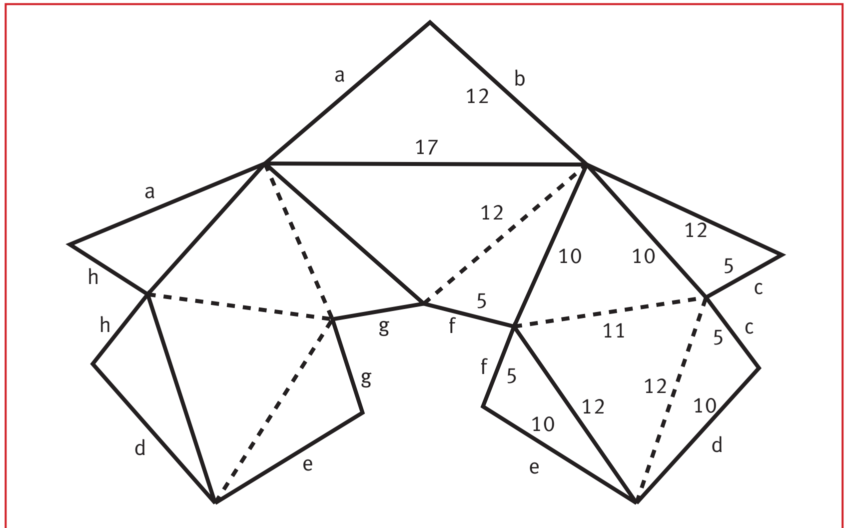


FIG. 2 *Planificação do poliedro flexível de Steffen.*

Investigando a rigidez de alguns esqueletos de poliedros

O experimento é centrado na construção dos esqueletos de alguns poliedros, com o objetivo de investigar a rigidez destes objetos e tornar rígidos os esqueletos flexíveis. Pelo Teorema de Cauchy, sabemos que todos os poliedros convexos são rígidos. Assim, figuras como o cubo e o dodecaedro são rígidas. No entanto, na realização do experimento, observamos um fato que, em primeira análise, parece conflitante com este resultado matemático: o esqueleto do cubo não é rígido, ou seja, após conectar as arestas e os vértices do cubo, obtemos um objeto flexível.

Essa é a sutil diferença que salientamos no início. Se recortássemos seis quadrados de papel com lados iguais às arestas do cubo e os colássemos nas faces do esqueleto de maneira a construir um poliedro, produziríamos uma figura rígida, por mais fino que fosse o papel. Assim, não há nada de errado em afirmar que o cubo é um poliedro rígido e que o esqueleto do cubo, construído com borrachinhas e palitos, é flexível.

Embora o recobrimento das faces com papel possa ser um interessante experimento, o desenvolvimento que damos aqui envolve tornar os esqueletos rígidos fazendo com que cada uma de suas faces seja rígida também.

Esqueletos convexos rígidos no espaço

Como consequência imediata do Teorema de Cauchy, podemos enunciar o seguinte corolário:

Corolário: Rigidez de esqueletos convexos

Todo esqueleto convexo no espaço cujas faces são rígidas é rígido.

Demonstração

A rigidez das faces do esqueleto convexo implica na rigidez do poliedro. Como o esqueleto é convexo, ele é rígido.

Etapa 1 **Construção dos esqueletos**

Na ETAPA 1 do EXPERIMENTO, os alunos terão que tornar rígidas as faces dos esqueletos através da construção de triângulos. Esta etapa envolve basicamente conceitos de trigonometria e geometria plana (métrica).

Etapa 2 **Como deixar os esqueletos rígidos**

Na ETAPA 2, os alunos são convidados a analisar os resultados e tirar algumas conclusões com base no experimento.

Na FOLHA DO ALUNO, aparece um quadro com as seguintes questões:

a. O que você acha que é suficiente para garantir que um esqueleto no espaço seja rígido?

b. Você acredita que um esqueleto cujas faces são todas triangulares pode ser flexível?

Depois de conhecer o Teorema de Cauchy e mais especificamente o Corolário que apresentamos, temos a resposta para a primeira questão: para que um esqueleto no espaço seja rígido, é suficiente que ele seja convexo e que todas as suas faces estejam rígidas; ou, o que é equivalente, que seja convexo com todas as faces triangulares.

Uma atenção especial pode ser dada à formalização dessa resposta. Em geral, os estudantes se esquecem de mencionar o fato da convexidade, o que dá margem a erros na resposta do item b. Ou seja, nem sempre um poliedro que tem todas as faces triangulares é rígido - no início deste guia apresentamos dois exemplos desse fato, a esfera de Conelly e o poliedro de Steffen. No entanto, se o poliedro tiver todas as faces rígidas e, além disso, for convexo, então ele será rígido.

No seguinte quadro apresentamos um resumo dos principais resultados matemáticos discutidos neste guia.

Resumo dos principais resultados apresentados

- *Poliedro* é diferente de *Esqueleto de Poliedro*;
- Teorema de Cauchy: "Todo poliedro convexo é rígido";
- Corolário do Teorema de Cauchy: "Todo esqueleto convexo no espaço cujas faces são triangulares é rígido";
- Existem poliedros flexíveis (não convexos) cujas faces são todas triangulares.

Fechamento

As contribuições deste experimento no estudo da Geometria Espacial em Nível Médio podem ser divididas em dois níveis de complexidade. O primeiro deles diz respeito à atividade de construção e manipulação dos objetos, o que possibilita aos alunos a exploração de uma nova dimensão, literalmente. Usualmente, o contato dos alunos com poliedros se dá de forma visual, através de desenho (projeções) desses objetos no plano. Assim, o simples fato de construir e manipular os esqueletos dos poliedros se constitui numa atividade interessante, que contribuirá na superação do obstáculo epistemológico que existe na passagem da Geometria Plana para a Geometria Espacial.

O segundo nível de complexidade, em torno do qual este guia foi pautado, diz respeito à formalização do conceito de rigidez e ao estudo das características que tornam um poliedro rígido. A discussão destes conceitos requer um nível de abstração matemático que é diferente do nível exigido para construção dos objetos e para tornar rígidas suas faces.

A atividade de fechamento que vamos propor diz respeito ao segundo nível. Pode ser sugerida a construção do poliedro de Steffen, cujas faces são todas triangulares e mesmo assim é flexível. Para tanto, é possível utilizar a planificação deste poliedro apresentada na FIGURA 2.

Após a construção, esclareça aos alunos a questão fundamental que norteou este experimento: para ser rígido, um poliedro precisa ter todas as faces rígidas e ser convexo.

Variações

Como já comentado, uma possível variação deste experimento consiste em tornar os esqueletos rígidos adicionando-lhes faces de papel. Neste caso, com a adição de faces, os esqueletos são transformados efetivamente em poliedros. Se forem convexos, pelo teorema de Cauchy, serão rígidos.

À parte disso, durante o experimento, proponha diferentes questões para os alunos, por exemplo: "Qual é a maneira de se tornar rígido um esqueleto, utilizando o menor número de diagonais auxiliares?" ou "Será que a solução com o menor número de diagonais é a que utiliza a menor quantidade (linear) de material?".

Outra variação possível é utilizar o mesmo material para explorar as propriedades métricas dos poliedros, através de seus esqueletos.

Bibliografia

Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. **A matemática do Ensino Médio**. Coleção do professor de matemática. Vol. 2. Sociedade Brasileira de Matemática. Impa. Rio de Janeiro – rj, 2003.

Artigos científicos relacionados

Connelly, R. **A Flexible Sphere**. Math.v Intel. 1, 130-131, 1978.

Connelly, R.; Sabitov, I.; and Walz, A. **The Bellows Conjecture**. Contrib. Algebra Geom. 38, 1-10, 1997.

Cromwell, P. R. **Polyhedra**. Nova Iorque: Cambridge University Press, pp. 222, 224, and 239-247, 1997.

Mackenzie, D. **Polyhedra Can Bend But Not Breathe**. Science 279, 1637, 1998.

Maksimov, I. G. **Polyhedra with Bendings and Riemann Surfaces**. Uspekhi Matemat. Nauk 50, 821-823, 1995.

Wells, D. **The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry**. Londres: Penguin, pp. 161-162, 1991.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Cristiano Torezzan

Revisores
Matemática
Antonio Carlos do Patrocinio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (imecc – unicamp)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal