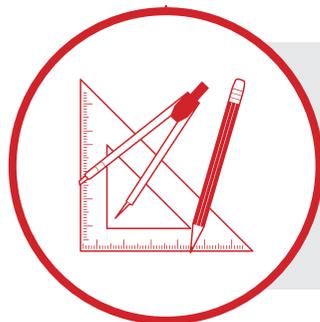




Matemática Multimídia

GEOMETRIAS
E MEDIDAS



O EXPERIMENTO

Experimento

Espelhos e simetrias

Objetivos da unidade

1. Estudar linhas de simetria com espelhos;
2. Relacionar o ângulo formado por dois espelhos e o número de imagens formadas;
3. Estudar polígonos regulares e suas linhas de simetria.



UNICAMP

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 



FUNDO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de
Educação a Distância

Ministério da
Ciência e Tecnologia

Ministério
da Educação



Espelhos e simetrias

O EXPERIMENTO

Sinopse

Este experimento propõe o estudo de simetrias com espelhos planos. Inicialmente, utilizamos um espelho para descobrir linhas de simetria. Depois, com dois espelhos, formamos ângulos entre eles e observamos a quantidade de imagens obtidas conforme variamos esta abertura. Em seguida estudamos a formação de polígonos com dois espelhos. Por fim, os alunos devem encontrar uma fórmula que relacione a medida do ângulo entre os espelhos com o número de imagens formadas.

Conteúdo

- Geometria Plana, Simetrias.

Objetivos

1. Estudar linhas de simetria com espelhos;
2. Relacionar o ângulo formado por dois espelhos e o número de imagens formadas;
3. Estudar polígonos regulares e suas linhas de simetria.

Duração

Uma aula dupla.



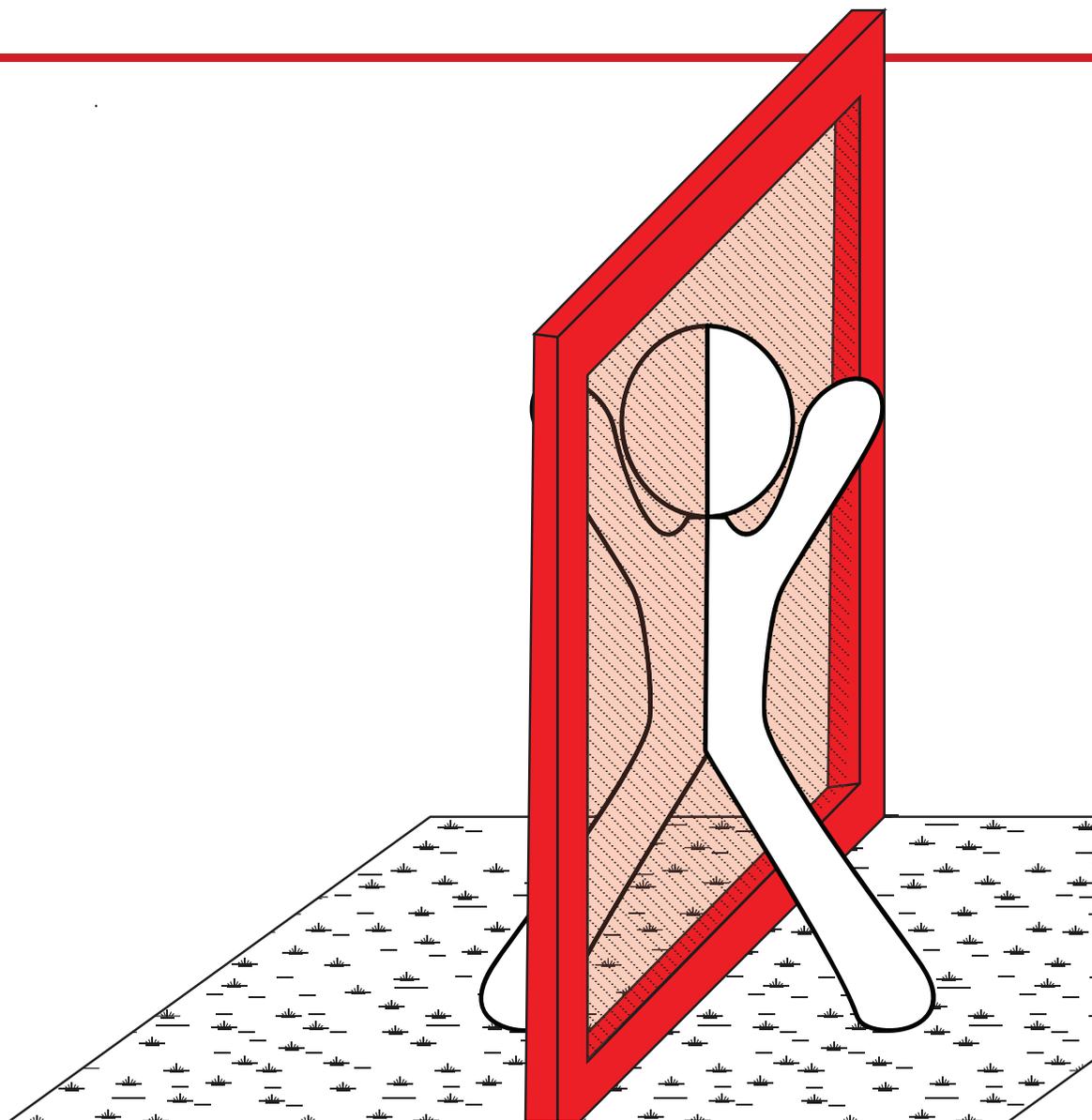
Introdução

A simetria é uma característica que pode ser observada em algumas formas geométricas, equações matemáticas e outras situações.

Definimos eixo de simetria de uma figura plana como sendo uma reta que a corta de tal modo que suas duas partes, situadas uma em cada lado da reta, sejam exatamente iguais. Assim dizemos que a figura é simétrica em relação a essa reta.

Neste experimento, propomos o uso de espelhos planos no estudo de importantes tópicos da matemática, a saber, as linhas de simetria, o estudo de polígonos regulares e formação de imagens com dois espelhos planos. Esse aprendizado é valioso para a matemática, podendo se estender para outras áreas como física, biologia, arte e até literatura.

Não há como negar que a simetria está presente ao nosso redor: podemos encontrá-la sob as mais diversas formas e em diferentes locais. Na natureza, trata-se de um fenômeno único e fascinante, que nos remete a sensações como equilíbrio, proporção, padrão, harmonia, beleza, ordem e perfeição. Você já se olhou no espelho hoje? A imagem que você vê é uma figura simétrica a você em relação ao espelho.



O Experimento

Material necessário

- Espelhos pequenos de mesmo tamanho;
- Régua;
- Compasso;
- Transferidor.

Materiais alternativos

- Cartolina laminada;
- Papel laminado colado em cartolina.



FIG. 1



Comentários iniciais

Linha de simetria de uma figura plana é uma reta que divide a figura em duas partes exatamente iguais. Neste contexto, o espelho é uma ferramenta muito útil para descobrir simetrias. Colocando-o perpendicularmente em cima de uma figura (como mostrado nas FIGURAS 2 e 3), é possível descobrir facilmente se existe alguma linha de simetria, que será a reta formada entre o espelho e a figura.

Preparação

Divida a sala em duplas e entregue uma FOLHA DO ALUNO para cada dupla.

Caso use papel ou cartolina laminados, como na sugestão de materiais alternativos, estes podem ser cortados em quadrados de tamanhos próximos a 8cm x 8cm (no caso do papel laminado, cole bem as bordas para não deformar as figuras refletidas).

! *Os espelhos tornam as observações mais precisas, sugerimos fortemente o seu uso.*

Para iniciar esta etapa, os alunos devem procurar em algum livro didático uma figura qualquer. A partir daí, é possível iniciar uma discussão com eles sobre o que é linha de simetria e se as figuras que eles encontraram possuem alguma linha de simetria.

Inicie neste momento o uso do espelho. Colocando-o em alguma parte da figura, seria possível obter a imagem toda olhando para ele?

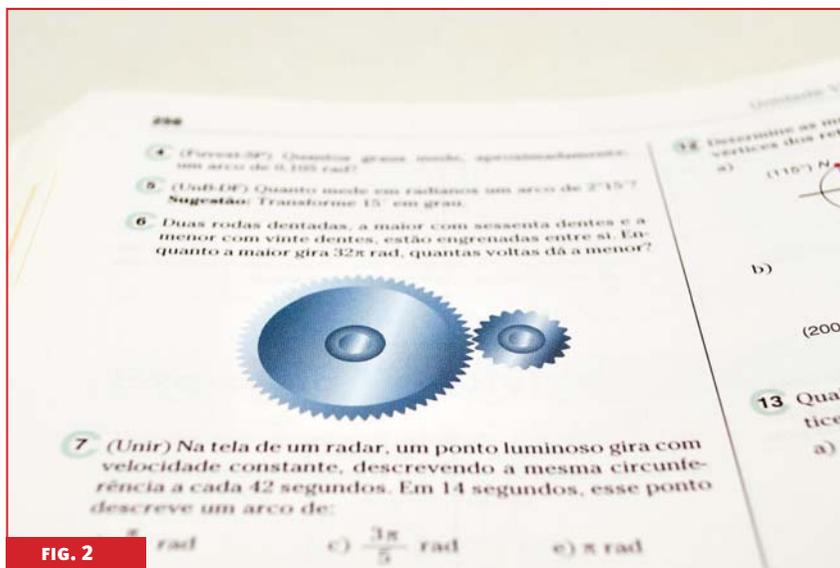
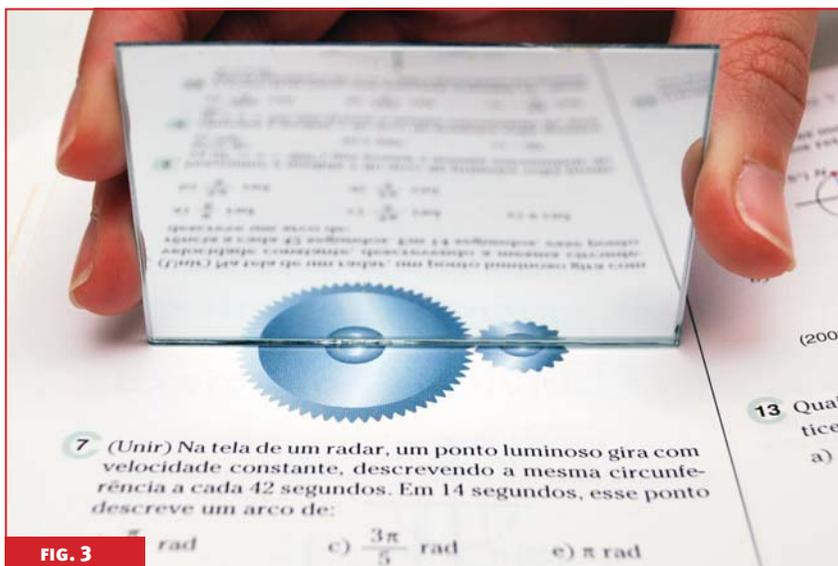


FIG. 2





Deixe os alunos se adaptar com o material por algum tempo e passe para os desenhos que estão na FOLHA DO ALUNO.

Algumas figuras geométricas e objetos do cotidiano podem apresentar linhas de simetria. Peça aos alunos que descubram se as figuras dadas na FOLHA DO ALUNO têm alguma linha de simetria; e, se têm, quantas são. Os alunos devem desenhar com a régua todos as linhas de simetria encontradas.

Para as figuras dadas, temos as seguintes linhas de simetria:

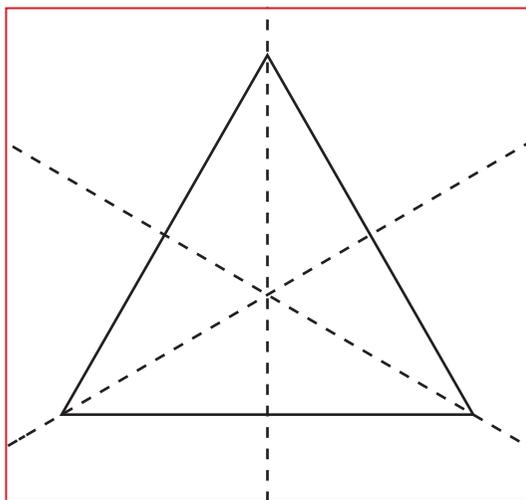


FIG. 4 *Solução da FOLHA DO ALUNO.*

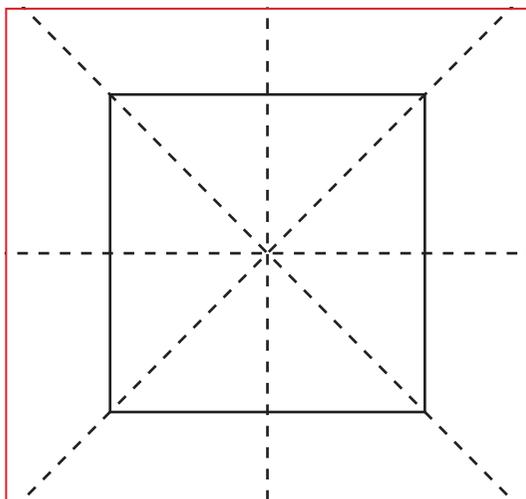


FIG. 5 *Solução da FOLHA DO ALUNO.*



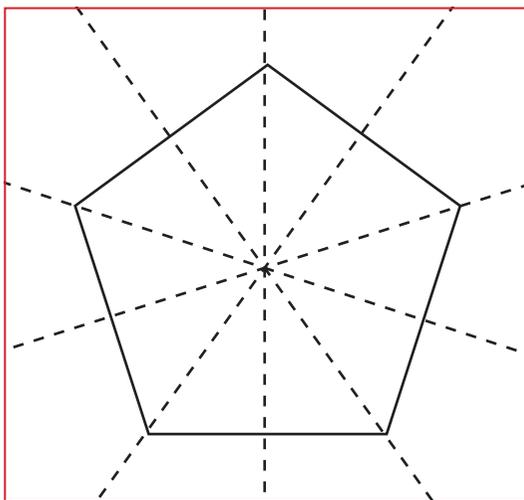


FIG. 6 *Solução da FOLHA DO ALUNO.*

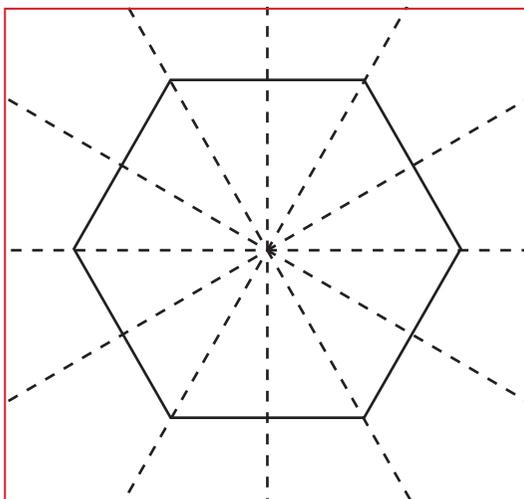


FIG. 7 *Solução da FOLHA DO ALUNO.*

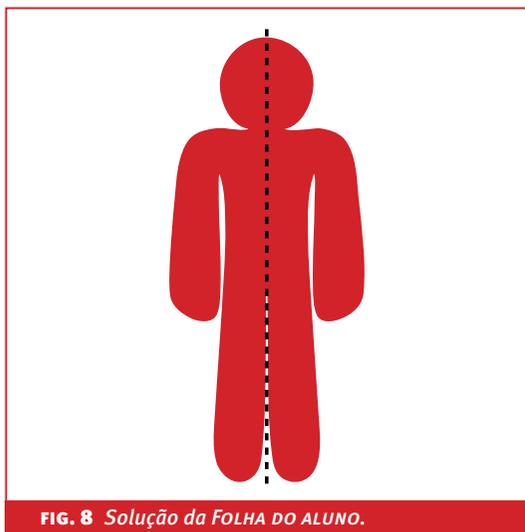


FIG. 8 *Solução da FOLHA DO ALUNO.*

É importante mostrar aos alunos que qualquer reta que passe pelo centro de uma circunferência é uma linha de simetria. Ou seja, a circunferência possui infinitas linhas de simetria.

Verifique se todos fizeram corretamente. Caso alguém não tenha conseguido, apenas diga quantas linhas possui determinada figura, para que o aluno as descubra por si.



Nesta etapa, serão utilizados dois espelhos por dupla, os quais deverão ser posicionados como mostrado na FIGURA 9. Caso estejam usando o papel laminado no lugar dos espelhos, peça aos alunos que o dobrem ao meio, formando um V, com o lado refletor para dentro.

Entre os espelhos deve ser desenhado um ponto de caneta, próximo à junção, como na FIGURA 9. Variando, então, a abertura dos espelhos, é possível observar imagens do ponto. Cada angulação formará uma quantidade diferente de imagens.

Os alunos devem anotar na TABELA 2 o número de imagens observadas e o ângulo referente entre os espelhos.

É importante notar que não só o objeto, mas o ambiente todo em torno dele deve ser refletido. Dê como dica para que os alunos, quando começar a surgir uma nova imagem, FIGURA 10, diminuam o ângulo entre as abas até que a imagem suma novamente, medindo então esse ângulo.

! *A cartolina deve ser dobrada exatamente ao meio, pois isso será muito importante na próxima etapa do experimento.*

***** *Caso o aluno esteja usando espelhos, é possível utilizar qualquer objeto pequeno, pois a imagem será mais nítida.*



FIG. 9

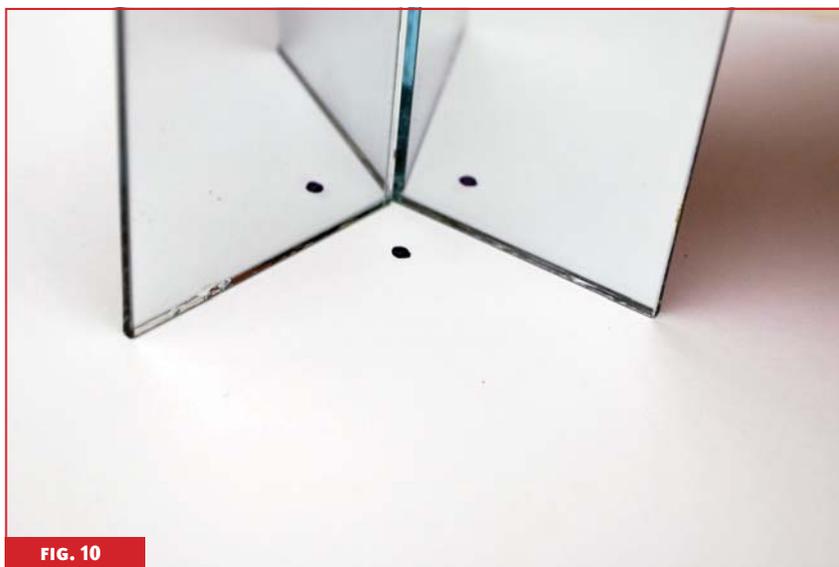


FIG. 10



Uma forma de obter os ângulos é traçar a abertura dos espelhos e medir com o transferidor.

Eles devem construir no caderno uma tabela como a do exemplo abaixo:

n	α
2	120°
3	180°
...	...

TABELA 1

onde n é o número de imagens formadas e α é o ângulo entre os espelhos, que deve ser medido com um transferidor. Deve ser construída uma tabela por dupla.

Terminadas as medições, escreva na lousa os valores encontrados por seus alunos. Monte uma tabela como a do exemplo anterior, com os ângulos que deveriam ser encontrados para cada quantidade de imagem. Os valores dos ângulos medidos devem ser sempre frações de 360, isto é quocientes cujos numeradores são iguais a 360 e denominadores inteiros maiores que 1. Porém, os alunos vão medir aproximações desses valores, por exemplo um sétimo de 360:

$$\frac{360}{7} \approx 51,4.$$

n	α
2	120°
3	90°
4	72°
5	60°
6	$51,4^\circ$
7	45°
8	40°
9	36°
10	$32,7^\circ$

TABELA 2 Para ser reproduzida na lousa

Provavelmente os alunos não encontrarão todos os valores acima. Se estiverem usando papel ou cartolina laminados, é possível que encontrem até 6 imagens, e, se estiverem utilizando espelhos, poderão encontrar mais.

Qual é o polígono formado?

ETAPA

3

Terminada a ETAPA 2, com os mesmos ângulos usados pelos alunos anteriormente, eles devem desenhar um segmento de reta em frente aos espelhos e descobrir qual é



o polígono regular formado para cada ângulo. Deve ser feita uma tabela no caderno que associe o ângulo entre os espelhos ao polígono encontrado. Essa tabela pode ser uma continuação da anterior.

Os alunos devem seguir o procedimento abaixo para visualizar os polígonos formados pelas reflexões do segmento de reta nos espelhos:

1. Desenhar o ângulo;

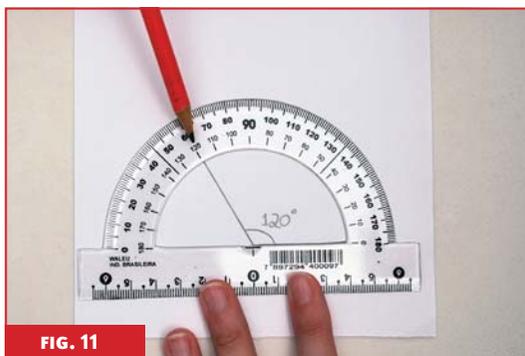


FIG. 11

* *Os ângulos podem ser construídos com compasso porém as medidas podem ser verificadas com o transferidor.*

2. Colocar o espelho em cima do ângulo formado;

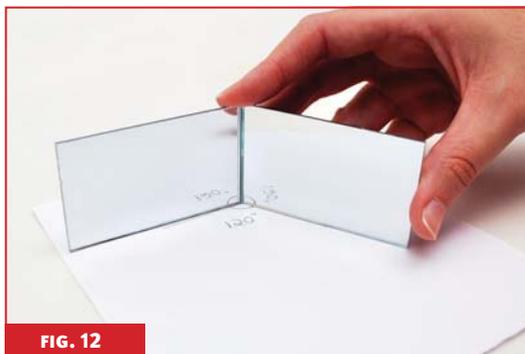
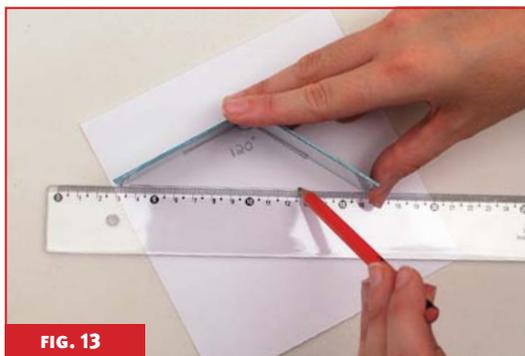


FIG. 12

3. Traçar um segmento de reta ligando as extremidades das folhas do espelho;



Observação: para obter imagens mais nítidas, basta construir uma reta paralela ao segmento já desenhado, porém mais próxima à dobra do espelho.

4. Para cada ângulo entre os espelhos, verificar qual é o polígono formado pelas imagens com as reflexões e anotar na tabela.

Os alunos devem constatar o polígono observado é regular pois o triângulo formado pelas abas do espelho e o segmento de reta traçado é isósceles, já que os espelhos têm o mesmo tamanho.



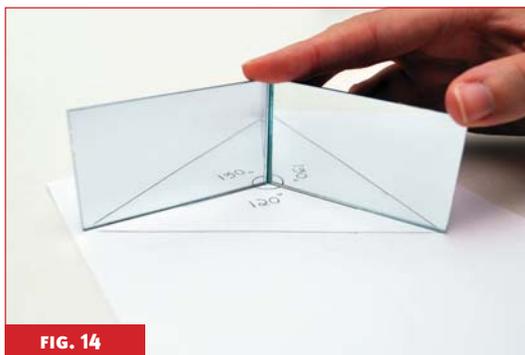


FIG. 14

n	α	polígono	nº de lados
10	$32,7^\circ$	undecágono	11
9	36°	decágono	10
8	40°	eneágono	9
7	45°	octógono	8
6	$51,4^\circ$	heptágono	7
5	60°	hexágono	6
4	72°	pentágono	5
3	90°	quadrado	4
2	120°	triângulo	3

TABELA 3 Para ser reproduzida no caderno

Quando os alunos terminarem, o professor também pode reproduzir na lousa, assim como fez na etapa anterior, a TABELA 3.

Fechamento

Finalmente, observando os resultados das ETAPAS 2 e 3, estimule-os a tentar encontrar um padrão. Note que, para cada ângulo, há uma relação entre a quantidade de imagens e o polígono formado. O objetivo é que eles encontrem uma fórmula geral que forneça o número de imagens ou o número de lados do polígono, de acordo com o ângulo entre os espelhos.

A fórmula referente à quantidade de lados do polígono pode ser mais facilmente encontrada. Assim, o professor pode sugerir que os alunos tentem obtê-la antes.

Permita que os alunos discutam entre si para descobrir essa fórmula. O tempo para essa parte fica a seu critério, conforme o andamento do experimento.

A fórmula geral que relaciona o ângulo entre os espelhos e a quantidade de imagens formadas é:

$$n = \left\lfloor \frac{360}{\alpha} \right\rfloor - 1,$$

onde n é a quantidade de imagens e α é o ângulo em graus entre os espelhos. O símbolo $\lfloor \cdot \rfloor$ representa o maior inteiro que é menor ou igual a $360/\alpha$. O ângulo α por sua vez, deve ficar restrito entre zero e meia volta, isto é, entre 0° e 180° .

➤ *O conceito de “maior inteiro que é menor ou igual a um número real” é importante e apresenta um gráfico interessante. Veja mais no GUIA DO PROFESSOR.*



E a fórmula que relaciona o ângulo α entre os espelhos e o número l de lados do polígono é:

$$l = \left[\frac{360}{\alpha} \right].$$

Observe com os alunos que $l = n + 1$.

Inicie com os alunos uma discussão sobre as linhas de simetria. Na ETAPA 3, os polígonos formados eram regulares. Comparando com a ETAPA 1, todos os polígonos regulares da atividade tinham linhas de simetria. Questione-os sobre essa relação e também se foi usada alguma linha de simetria na formação do polígono com os espelhos.

Nos polígonos regulares dados na ETAPA 1, questione os alunos se existe alguma maneira de posicionar dois espelhos sobre as linhas de simetria traçadas para que a imagem obtida seja o próprio polígono.

É possível verificar que sempre existem duas linhas que formam entre si o ângulo correspondente àquele polígono, como na TABELA 3. A FIGURA 15 mostra as linhas onde devem ser dispostos os espelhos, e a FIGURA 16, a imagem formada no espelho.

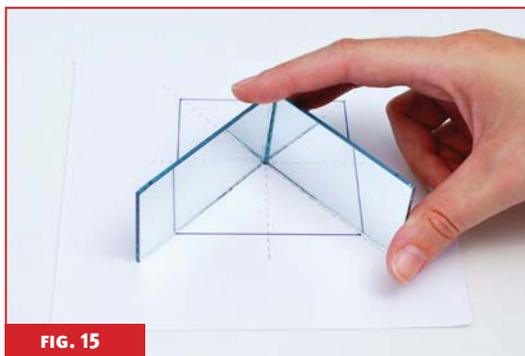
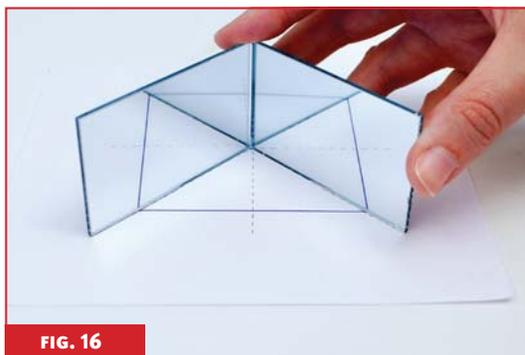


FIG. 15



Note que, para a circunferência, qualquer ângulo fornece a imagem completa: basta posicionar os espelhos sobre quaisquer raios. Serão formadas $\lceil 360/\alpha \rceil - 1$ imagens e as fatias terão abertura α , ou seja, serão $(\lceil 360/\alpha \rceil - 1) \times \alpha$ graus mais o ângulo desenhado (que não é imagem); assim teremos 360° , ou seja, a circunferência completa.

Por fim, as discussões sobre simetrias se estendem a muitos ramos, como física, biologia, etc. Deixe seus alunos usarem a criatividade.



Ficha técnica

AUTORES

Samuel Rocha de Oliveira
e Rita Santos Guimarães

REDAÇÃO

Mariana Sacrini Ayres Feraz

REVISORES

Matemática

Antônio Carlos Patrocínio

Língua Portuguesa

Carolina Bonturi

Pedagogia

Ângela Soligo

PROJETO GRÁFICO

E ILUSTRAÇÕES TÉCNICAS

Preface Design

ILUSTRADOR

Lucas Ogasawara de Oliveira

FOTÓGRAFO

Augusto Fidalgo Yamamoto



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Reitor

Fernando Ferreira Costa

Vice-Reitor

Edgar Salvadori de Decca

Pró-Reitor de Pós-Graduação

Euclides de Mesquita Neto

MATEMÁTICA MULTIMÍDIA

Coordenador Geral

Samuel Rocha de Oliveira

Coordenador de Experimentos

Leonardo Barichello

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)

Diretor

Jayme Vaz Jr.

Vice-Diretor

Edmundo Capelas de Oliveira

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 