

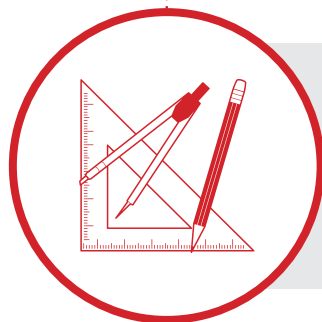


Matemática Multimídia

GEOMETRIA
E MEDIDAS



GUIA DO PROFESSOR



Experimento

Espelhos e simetrias

Objetivos da unidade

1. Estudar linhas de simetria com espelhos;
2. Relacionar o ângulo formado por dois espelhos e o número de imagens formadas;
3. Estudar polígonos regulares e suas linhas de simetria.



UNICAMP

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons



FUNDO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de
Educação a Distância

Ministério da
Ciência e Tecnologia

Ministério
da Educação



Espelhos e simetrias

GUIA DO PROFESSOR

Sinopse

Este experimento propõe o estudo de simetrias com espelhos planos. Inicialmente, utilizamos um espelho para descobrir linhas de simetria. Depois, com dois espelhos, formamos ângulos entre eles e observamos a quantidade de imagens obtidas conforme variamos esta abertura. Em seguida estudamos a formação de polígonos com dois espelhos. Por fim, os alunos devem encontrar uma fórmula que relacione a medida do ângulo entre os espelhos com o número de imagens formadas.

Conteúdo

Geometria Plana, Simetrias.

Objetivos

1. Estudar linhas de simetria com espelhos;
2. Relacionar o ângulo formado por dois espelhos e o número de imagens formadas;
3. Estudar polígonos regulares e suas linhas de simetria.

Duração

Uma aula dupla.



Introdução

Os espelhos planos refletem a luz de tal maneira que torna possível reproduzir imagens semelhantes em nossas mentes. Os processos físicos dos espelhos e os fisiológicos da visão do ser humano são bem interessantes, mas não vamos lidar com esse assunto aqui. Entretanto, aproveitaremos as propriedades de reflexão dos espelhos, em especial as responsáveis por produzir imagens semelhantes aos objetos físicos originais.

O conceito de simetria requer certo cuidado, pois há definições precisas em Matemática e Física avançadas, por exemplo, que nem sempre correspondem às definições usadas em Artes. A origem da palavra “simetria” é grega e está associada a objetos ou coisas proporcionais, harmoniosas. Vamos nos concentrar na simetria geométrica, isto é, na semelhança da forma em torno de uma linha reta ou de um plano e, mais especificamente, na simetria de reflexão ou lateral em relação a um segmento de reta. Assim, nesta atividade, vamos tratar apenas de simetrias no plano.

Aproveitamos também o uso de dois espelhos para mostrar uma relação entre dois conjuntos, a saber, o conjunto dos ângulos entre 0° e 180° e o conjunto do número de imagens vistas nos espelhos combinados.

Motivação

As simetrias geométricas, naturais ou artificiais, estão por toda parte e há vários conteúdos que podemos utilizar para a Matemática do Ensino Médio usando espelhos e suas imagens simétricas (como fizemos na primeira etapa do experimento). Veja, por exemplo, uma borboleta e uma figura típica de caleidoscópio.





Temos a oportunidade de mostrar também uma fórmula que relaciona o ângulo entre os espelhos e o número total de imagens formadas (segunda etapa) ou o número de segmentos de retas observados, combinando fonte e imagens (terceira etapa).

O experimento

Comentários iniciais

Definição

Linha de simetria é um segmento de reta que divide uma figura plana finita em duas partes que têm formas geométricas iguais.

A igualdade se refere aos comprimentos e ângulos, pois vemos que a reflexão inverte os lados de uma figura.

Essa definição de linha de simetria é suficiente para os nossos propósitos.

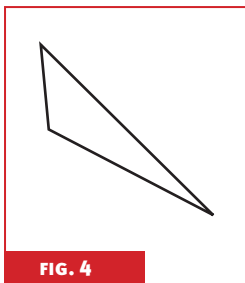
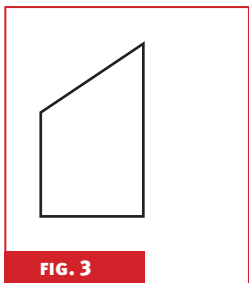
Um objeto tridimensional pode ter um *eixo de simetria* em torno do qual qualquer rotação rígida não altera sua aparência, isto é, a geometria do objeto não varia se ele girar em torno de seu eixo de simetria. Outro objeto tridimensional pode ter um *plano de simetria* que o separa em duas partes idênticas. É comum a obtenção de figuras planas a partir de cortes em corpos tridimensionais e, nos casos em que o corte incluir o eixo de simetria ou for perpendicular ao plano de simetria do objeto, teremos uma figura plana com uma linha de simetria.

É bom lembrar que a imagem em um espelho plano mantém os comprimentos e os ângulos dos objetos refletidos, isto é, mantém a forma geométrica, mas inverte a lateralidade. Assim, o direito e o esquerdo ficam trocados em uma reflexão. Contudo, se forem permitidas duas ou um número par de reflexões, a imagem final mantém a lateralidade original.



Etapa 1 Simetrias com um espelho

Nesta etapa do experimento usamos o espelho plano para encontrar as linhas de simetria de figuras planas. As figuras são simples e servem para familiarizar ou lembrar os alunos das suas simetrias.



Pense e responda

Quais das figuras dadas têm linha de simetria? Quantas são essas linhas?

Os polígonos regulares mostrados na Folha do Aluno têm linhas de simetria iguais ao número de lados (de mesmo tamanho). Assim, o triângulo tem três, o quadrado tem quatro, o pentágono tem cinco e o hexágono tem seis. As duas FIGURAS 3 e 4, porém, não têm linhas de simetria. Professor, mostre que não há nenhuma posição do espelho sobre essas figuras que consiga reproduzir as figuras originais, isto é, elas não têm linha de simetria.

As figuras planas de frente, parte anterior e parte posterior (frontal e dorsal) do homem ou da mulher são quase simétricas. De fato, Leonardo da Vinci deixou isso registrado no seu famoso desenho “Homem Vitruviano”, em que valoriza a simetria e as formas geométricas nas quais o homem ficaria circunscrito.

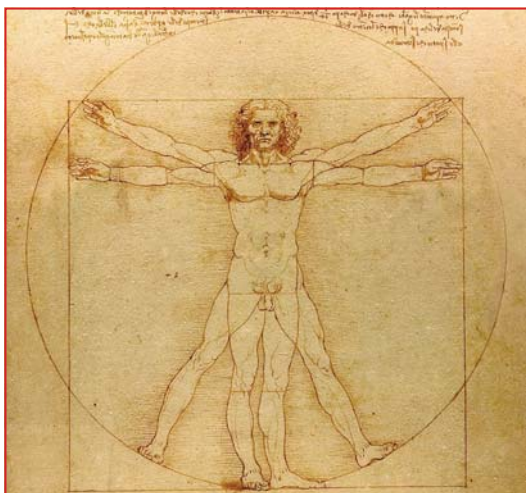


FIG. 5 *Desenho Homem Vitruviano de Leonardo da Vinci, cerca de 1490.*

Há várias moléculas planas que têm linha(s) de simetria, por exemplo:

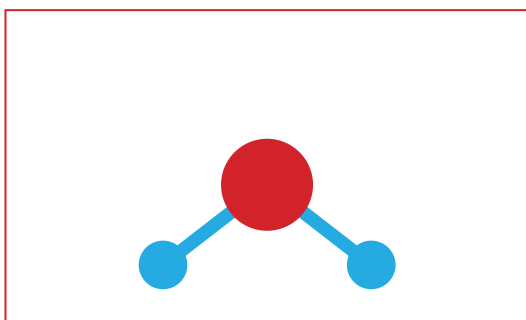


FIG. 6 *H₂O – Água.*



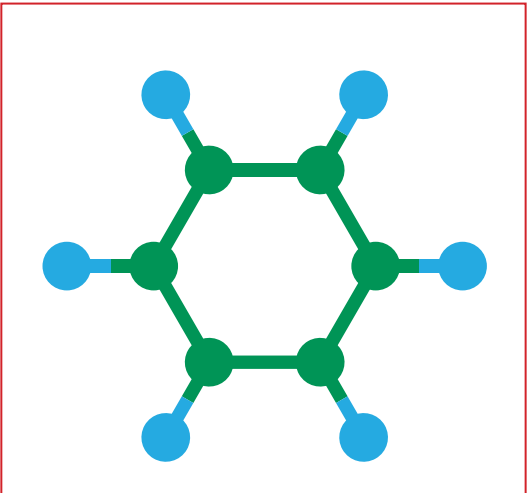


FIG. 7 C_6H_6 – Benzeno

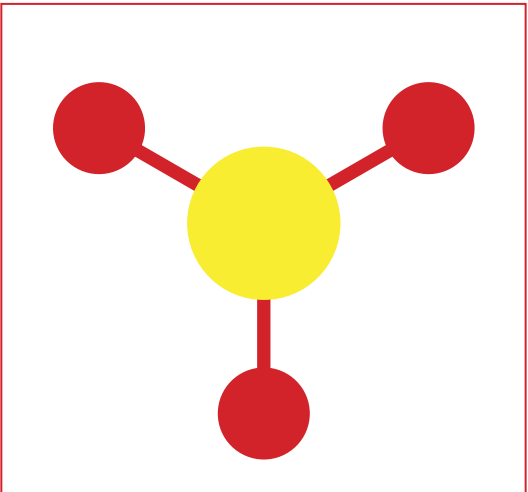
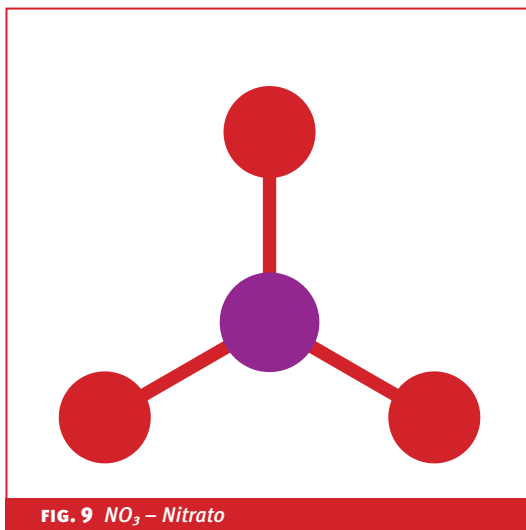


FIG. 8 SO_3 – Óxido sulfúrico



Encontramos as seguintes letras (maiúsculas) com linhas de simetria: A, B, C, D, E, H, I, K, M, O, T, U, V, W, X e também, na nossa grafia atual, podemos encontrar os seguintes numerais com linhas de simetria: 0, 3, 8.

Da mesma forma, algumas palavras quando em letras maiúsculas podem exibir linhas de simetria, por exemplo:

- Simetria direita-esquerda:
 - ATA
 - OVO
 - MATAM
- Simetria topo-base:
 - COCO
 - BECO
 - BIXO



Etapa 2 Imagens com dois espelhos

Nesta etapa, a composição de imagens com o uso de dois espelhos é apresentada com ênfase na sistematização das informações e coleta de dados. Os alunos devem obter a seguinte tabela:

n	α
2	120°
3	90°
4	72°
5	60°
6	51,4°
7	45°
8	40°
9	36°
10	32,7°

TABELA 1

Veja na FIGURA 10 o uso de um ponto como fonte e a fácil observação de dois pontos-imagem. Podemos colocar em frente aos espelhos qualquer objeto pequeno, desde que não dificulte a visualização das imagens.



FIG. 10

O professor pode fazer um gráfico na lousa como o da FIGURA 11, que relaciona o número n de imagens em função dos ângulos α entre os espelhos, variando de 30° a 130° . Trata-se de um gráfico de uma função constante por partes.

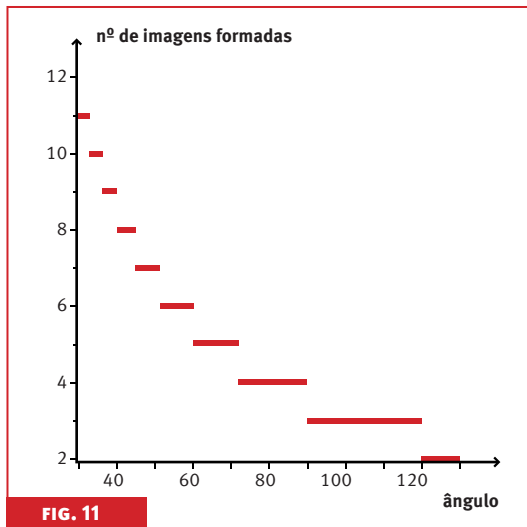


FIG. 11

Etapa 3 Qual é o polígono formado?

Nesta etapa vamos observar imagens de segmentos de retas em frente aos dois espelhos planos com um ângulo agudo α entre eles. Devemos observar um polígono cuja quantidade de lados depende do ângulo de abertura α . A sugestão do experimento é apresentar os ângulos que dividem a volta completa, isto é, 360° , em ângulos iguais, e, dessa forma, o polígono resultante observado é regular, isto é, um polígono que tem todos os ângulos e lados iguais. Para isso, o uso do transferidor é necessário. Veja a tabela:



n	α	polígono	nº de lados
10	32,7°	undecágono	11
9	36°	decágono	10
8	40°	eneágono	9
7	45°	octógono	8
6	51,4°	heptágono	7
5	60°	hexágono	6
4	72°	pentágono	5
3	90°	quadrado	4
2	120°	triângulo	3

TABELA 2 Tabela para ser reproduzida no caderno.

Fechamento

A fórmula geral que relaciona o ângulo entre os espelhos e a quantidade de imagens formadas é:

$$n = \left[\frac{360}{\alpha} \right] - 1$$

onde n é a quantidade de imagens e α é o ângulo em graus entre os espelhos.

A quantidade de lados l , incluindo o segmento riscado e as suas imagens, é dada por:

$$l = \left[\frac{360}{\alpha} \right].$$

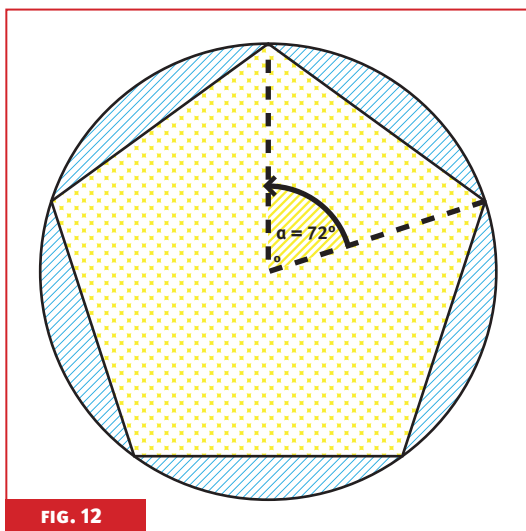
Observe que $\lfloor 360/\alpha \rfloor$ deve representar o maior inteiro menor ou igual a $360/\alpha$, que é a divisão entre a volta completa de 360° e o ângulo α entre os espelhos. Esse ângulo α , por sua vez, deve ficar restrito entre 0° e meia volta, isto é, 180° .

Usamos espelhos planos para familiarizar ou recordar os alunos dos conceitos de simetria (de reflexão) e também fornecer exemplos de relações entre dois conjuntos: o dos ângulos, que pode ser visto como um subconjunto dos números reais, e o do número de imagens, que é um subconjunto dos números naturais.

A existência ou ausência de simetrias geométricas pode revelar características fundamentais dos objetos. Por exemplo, os mamíferos de terra seca têm simetria lateral, mas não têm simetria entre a parte de cima e a parte de baixo, pois a gravidade impõe uma diferença na direção vertical. Os mamíferos não têm, tampouco, simetria entre a parte dorsal e ventral, o que pode ser entendido pela especialização ou vantagem no deslocamento em um sentido mais que em outro. Em geral, seres imóveis como as árvores não apresentam essa diferença entre dorsal e frontal. O tronco de uma árvore tem simetria próxima à simetria do círculo, ou seja, não é possível identificar o lado direito e esquerdo ou da frente e de trás de uma árvore.

As propriedades de simetria por reflexão são apenas uma parte do estudo de transformações que preservam os comprimentos no plano. Há também a translação e a rotação. Na primeira etapa, exploramos um pouco a reflexão, mas não vamos lidar com translação neste experimento, embora abordaremos um pouco da rotação no plano. Fizemos isso na utilização dos dois espelhos planos: percebemos algumas figuras planas compostas pela fonte e suas imagens, com simetria de rotação.





Sabemos que o polígono regular tem seus vértices em um círculo, como é o caso do pentágono na FIGURA 12. Nesse caso, uma rotação de 72° em torno do centro do pentágono move os vértices A, B, C, D e E no sentido da rotação, mas, se os vértices não fossem identificados, não saberíamos se o pentágono foi rodado ou não.

Os polígonos regulares têm *simetrias de rotação* em torno de seu centro. O triângulo equilátero tem simetria de rotação de 120° ; o quadrado, de 90° ; o pentágono, de 72° ; o hexágono, de 60° etc. A generalização é óbvia: um polígono regular de l lados tem simetria de rotação de $360^\circ/l$ em torno de seu centro.

Já a *simetria de reflexão* de um polígono regular pode ser observada quando colocamos um espelho na mediatriz de um dos lados ou em uma das diagonais - veremos a imagem do meio polígono sobreposta ao meio polígono que foi bloqueado pelo espelho.

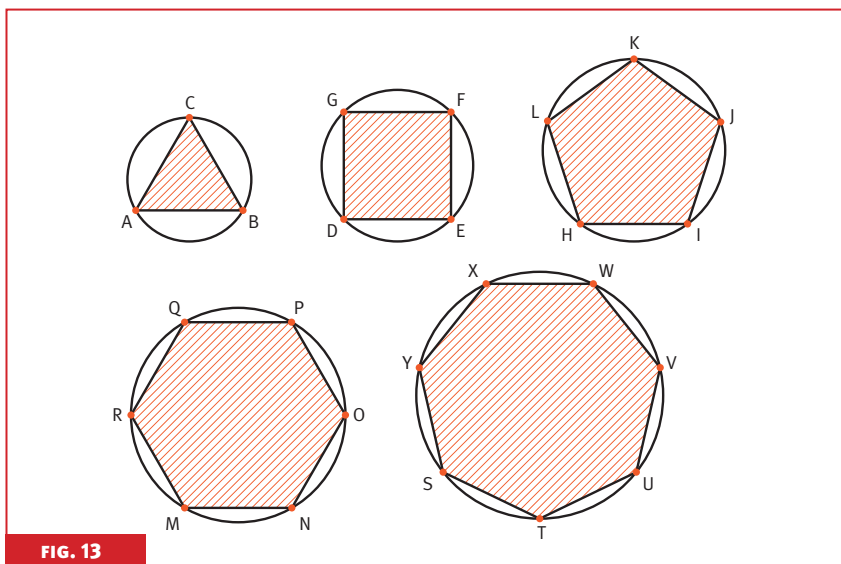


FIG. 13

Veja a FIGURA 13, em especial o triângulo. Os vértices são ABC (no sentido anti-horário). Sob uma rotação de 60° , teríamos um triângulo congruente ao original com os vértices CAB. Outra rotação de 60° nos daria a sequência de vértices BCA. Três rotações de 60° colocam o polígono na sua posição original.

Por outro lado, se trocássemos dois vértices e mantivéssemos um, teríamos outros triângulos congruentes ao original com as seguintes sequências de vértices: ACB, CBA, BAC.

Desta forma, há seis sequências distintas de vértices que apresentam triângulos congruentes entre si, a saber: ABC, CAB, BCA, ACB, CBA, BAC. Essas seis configurações representam as simetrias do triângulo equilátero, três de rotação e três de reflexão.

Veja o quadrado da FIGURA 13 com os vértices identificados por DEFG (no sentido anti-horário). Se fizermos uma, duas e três rotações de 90° em torno do seu centro, teríamos os quadrados congruentes ao original com os vértices GDEF, FGDE e EFGD respectivamente. Quatro rotações de 90° colocariam o quadrado na sua posição original.

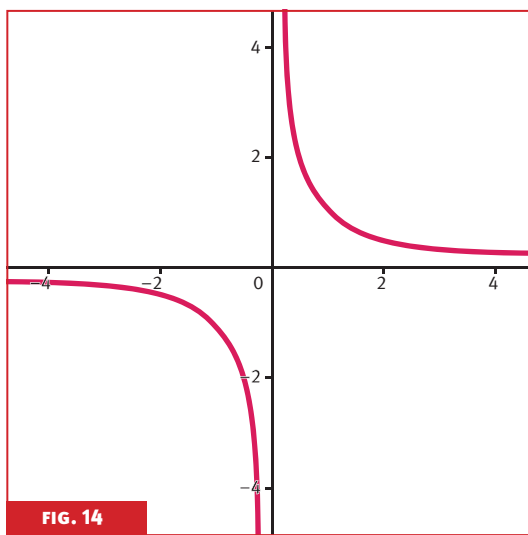
As reflexões pelas mediatrizes nos fornecem as seguintes sequências de vértices: EDGF, DGFE, GFED e FEDG. De maneira parecida, as reflexões



pelas diagonais nos fornecem, por exemplo, FEDG e DGFE, mas estes já foram obtidos anteriormente e portanto não são independentes. Ao final obtemos oito quadrados distintos pelos vértices mas congruentes ao original.

As $2l$ simetrias dos demais polígonos regulares de l lados podem ser obtidas de maneira similar e são parte do grupo de simetrias denominado diedral. Um caso limite é o do círculo, que tem simetria sob qualquer rotação em torno de seu eixo.

A ideia de simetria não precisa ficar restrita à forma geométrica. Podemos associar uma simetria a elementos de algum conjunto que, sob algum tipo de transformação ou operação, têm alguma de suas medidas inalteradas. Por exemplo, o gráfico cartesiano da FIGURA 14 da função hipérbole $y = 1/x$: se trocarmos y pelo x , teremos o mesmo gráfico; da mesma forma, se trocarmos x por $-x$, e y por $-y$, o gráfico, como um todo, também será o mesmo.



Não é objetivo desta atividade esgotar os assuntos de simetria. No entanto, havendo interesse, o tema *grupos de simetria* ou *grupos de permutações* pode render uma boa pesquisa.

Variações

Ao invés de usar espelhos, pode ser utilizada dobradura em papel para obter figuras refletidas. Assim, com uma folha em branco e um papel carbono dobrados ao meio podem ser representadas figuras simétricas, como mostrado nas FIGURAS 15, 16 e 17.

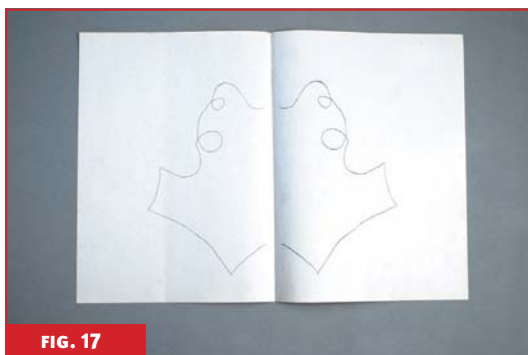


FIG. 15



FIG. 16





Para representar a reflexão de um ponto com dois espelhos, basta dobrar uma folha, com mostrado na FIGURA 18. Inicialmente deve ser feita a dobra com o ângulo desejado (entre os espelhos).



Então, como na FIGURA 19, dobre uma das abas e coloque um papel carbono dobrado no meio, com as faces que marcam para fora.



FIG. 19

A seguir, dobre a outra aba e coloque outro papel carbono dobrado, com as faces que marcam para fora. Feito isso, desenhe um ponto na parte superior, como indicado na FIGURA 20.

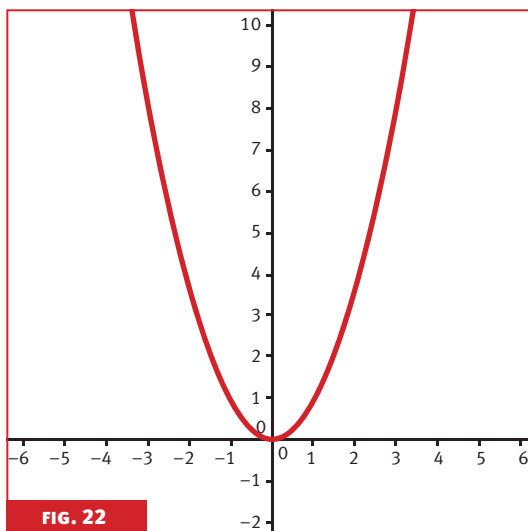


FIG. 20

Terminado o procedimento, retire os papéis carbono e abra a dobradura. É possível observar, então, três pontos que são referentes às imagens formadas quando se utilizam dois espelhos com um ângulo θ entre eles (FIGURA 21).



Outra possibilidade que pode ser explorada é procurar por simetrias (de reflexão e de rotação no plano) nos gráficos das funções principais do Ensino Médio. A FIGURA 22, por exemplo, mostra uma parábola, $y = x^2$, cujo eixo de simetria é o eixo y .

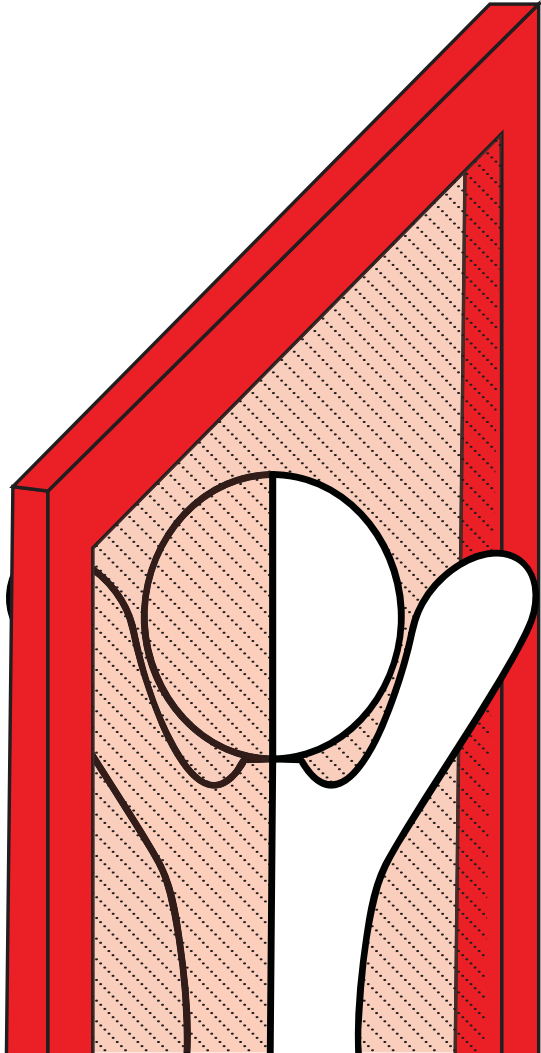


Bibliografia

GARDNER, Martin. **The New Ambidextrous Universe: Symmetry and assymetry from mirror reflections to supersymmetry**. New York: Freeman, Third Revised Edition, 1990.

CARROL, Lewis. **Alice no país do espelho**. São Paulo: L&PM, 2004.





Ficha técnica

AUTOR

Samuel Rocha de Oliveira

REVISORES

Matemática

Antônio Carlos Patrocínio

Língua Portuguesa

Carolina Bonturi

Pedagogia

Ângela Soligo

PROJETO GRÁFICO

E ILUSTRAÇÕES TÉCNICAS

Preface Design

ILUSTRADOR

Lucas Ogasawara de Oliveira

FOTÓGRAFO

Augusto Fidalgo Yamamoto



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Reitor

Fernando Ferreira Costa

Vice-Reitor

Edgar Salvadori de Decca

Pró-Reitor de Pós-Graduação

Euclides de Mesquita Neto

MATEMÁTICA MULTIMÍDIA

Coordenador Geral

Samuel Rocha de Oliveira

Coordenador de Experimentos

Leonardo Barichello

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)

Diretor

Jayme Vaz Jr.

Vice-Diretor

Edmundo Capelas de Oliveira

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 