Matemática Multimídia

GEOMETRIA
E MEDIDAS

O EXPERIMENTO

Experimento

Engenharia de grego

Objetivos da unidade

1. Aplicar conceitos básicos de geometria plana na solução de um problema de construção civil;
2. Planejar, construir e avaliar um projeto.

UNICAMP

FUNDO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de
Educação a Distância

Ministério da
Ciência e Tecnologia

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Engenharia de grego

O experimento

Sinopse

Neste experimento, os alunos deverão encontrar uma maneira de projetar um túnel que será construído partindo ao mesmo tempo de dois pontos fixados no contorno de uma montanha. O desafio é utilizar conceitos de geometria plana para descobrir em que direção iniciar as escavações em cada uma das extremidades do túnel.

Conteúdos

- Geometria Plana: Simetrias, Semelhança de triângulos;
- Relações trigonométricas em um triângulo.

Objetivos

1. Aplicar conceitos básicos de geometria plana na solução de um problema de construção civil;
2. Planejar, construir e avaliar um projeto.

Duração

Uma aula dupla.

Matemática Multimídia

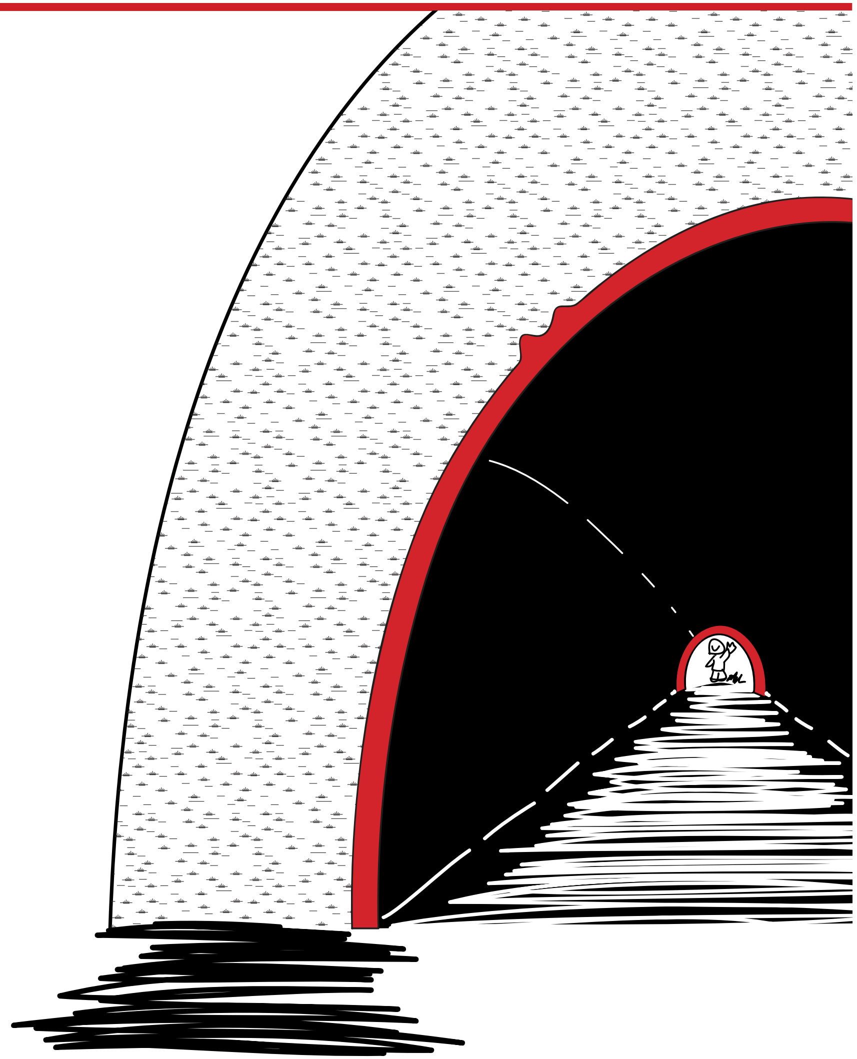
Introdução

Hoje dispomos de diversos recursos tecnológicos inimagináveis há 2000 anos. Contudo, a diferença de conhecimento acumulado não impediu que civilizações, milhares de anos distantes da nossa, impressionassem o mundo moderno com sua capacidade de obter grandes feitos com ferramentas que hoje consideramos simples.

Sem ter a chance de utilizar um GPS, por exemplo, o que será que poderíamos fazer usando apenas as ferramentas disponíveis aos gregos há 2000 anos? Certamente muita coisa, mas precisamos pensar e planejar.

Neste experimento, apresentamos aos alunos um problema enfrentado pelos gregos por volta de 530 a.C. Apesar do uso de conceitos simples de geometria, obter a mesma solução utilizada há dois milênios exigirá dos alunos criatividade e habilidade no uso das ferramentas matemáticas.

Além disso, a atividade apresenta superficialmente os procedimentos adotados por alguém que quer realizar uma obra: planejar, executar e avaliar.



O Experimento

Material necessário

- 2 cartolinas;
- Régua;
- Esquadro;
- Compasso;
- Transferidor;
- Fita crepe;
- Caixa de papelão.

Materiais alternativos

- Papel kraft ou outro de grande dimensão;
- Algo que possa servir de obstáculo, uma mochila por exemplo.

FIG. 1

Comentários iniciais

No ano de 530 a.C., na ilha de Samos, Polícrates delegou a Eupalinos, "o engenheiro", a construção um aqueduto com objetivo de trazer água das fontes que havia do outro lado de um monte.

Para agilizar a construção, Eupalinos resolveu construir o aqueduto usando duas frentes de trabalho, uma em cada lado do monte, de modo que elas se encontrassem no meio do trajeto, ou seja, no interior da montanha.

Assim foi feito e o mais impressionante foi o pequeno erro em relação ao encontro dos túneis que distavam em 9 metros na horizontal e 3 metros na vertical. Esses valores correspondem a menos de 1% do comprimento do túnel (algo em torno de 1 km).

! *O problema enfrentado por Eupalinos é tridimensional, porém aqui simplificaremos para um equivalente de duas dimenções.*

\+ *Na Revista do Professor de Matemática há um artigo chamado "Como construir um túnel se você sabe geometria", escrito por Euclides Rosa, que apresenta mais detalhes sobre o tema.*

Preparação

Divida a sala em grupos de 3 pessoas, entregando a eles uma cópia da Folha do Aluno. Apresente o problema proposto a Eupalinos, fazendo a leitura da folha entregue e destacando que eles devem atuar como os engenheiros responsáveis pela obra.

! *Sugerimos grupos de três alunos para que eles tenham com quem discutir a atividade. Grupos maiores podem fazer com que alunos fiquem ociosos.*

Antes que iniciem qualquer construção, enfatize que suas ideias e projetos devem ser registrados antes de ser executados. Para isso, podem ser usados seus cadernos ou o formulário disponível em ANEXO.

No meio do caminho tem uma montanha

ETAPA
1

Para simular o problema de Eupalinos, temos que simular também a montanha. Para isso, junte as carteiras de modo que nelas possamos fixar duas cartolinas. Peça aos alunos que desenhem o contorno da base de uma montanha como na FIGURA 2.

* *O experimento pode ser executado no chão. Cuide apenas para que os alunos não utilizem a "visão aérea" da montanha para encontrar a direção dos túneis.*

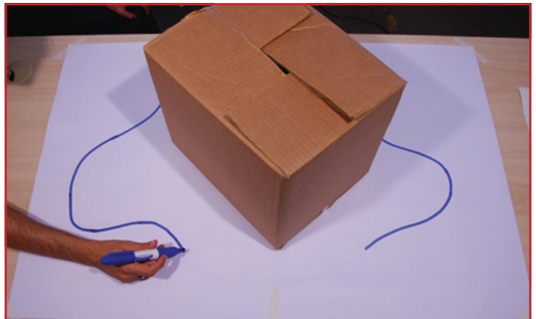


FIG. 2 *Desenho do contorno da montanha.*

A caixa (ou os outros obstáculos) que estiver representando a montanha, não deve ser retirada do interior do contorno até que os alunos tenham obtido as direções em que irão escavar o túnel.

Em seguida, peça aos grupos para marcar dois pontos no contorno construído, os quais serão as entradas do túnel. Os pontos deverão ficar em lados opostos da montanha.

Planejamento

Para planejar é preciso saber quais são as ferramentas disponíveis. Assim, anuncie para a sala os seguintes instrumentos que poderão ser utilizados:

- Régua graduada;
- Transferidor;
- Esquadro;
- Compasso.

Permita que os alunos discutam o problema por alguns minutos. É necessário que os alunos redijam uma série de instruções sobre como executar a obra. Porém, eles não devem fazer seus rascunhos e planos diretamente na cartolina.

Enquanto os alunos discutem seus projetos, passe pelos grupos questionando-os quanto à viabilidade e coerência de suas propostas. É bastante provável que as ideias dos alunos envolvam "possibilidades de acerto". É importante que a solução proposta pelos alunos esteja baseada em argumentos sólidos e não apenas em tentativas.

Execução

Durante a execução da obra, duas coisas são estritamente proibidas:

- Não é permitido retirar a caixa que simula a montanha;
- Não é permitido invadir o perímetro da montanha nem para realizar medidas ou traçar linhas.

Destaque essas regras antes que os alunos iniciem a construção.

Dependendo do projeto que for concebido, a construção levará aproximadamente uns 15 minutos. O resultado final dessa construção será formado por duas semirretas com origens fora do contorno da montanha, indicando as direções a serem escavadas.

* *No Fechamento descrevemos a solução encontrada por Eupalinos e expomos algumas dicas para os alunos.*

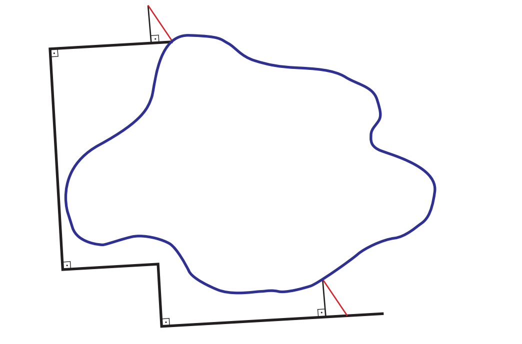


FIG. 3 *Direção onde em que os túneis deverão ser escavados.*

Encontradas as semirretas que apontam as direções, os alunos devem retirar os obstáculos e traçar o túnel. Muito provavelmente as semirretas não se encontrarão e esse resultado será discutido na próxima Etapa.

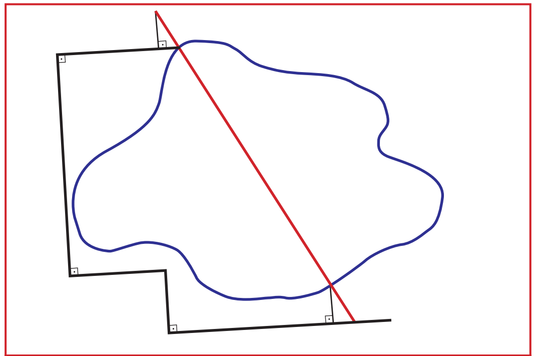


FIG. 4 *Tuneis traçados.*

E aí? Deu certo?

ETAPA 2

Análise do erro

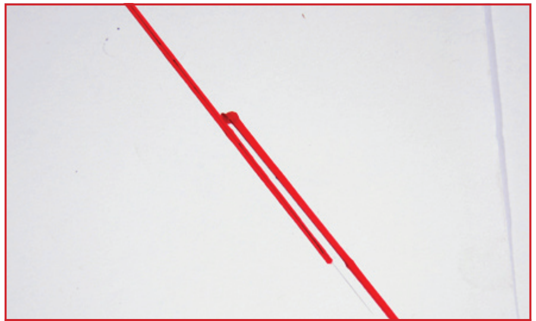


FIG. 5 *Erro de 2 mm no caso.*

* *As réguas, por exemplo, medem apenas até a escala dos milímetros. Com a realização de várias medidas, esses erros se propagam. Para mais detalhes sobre isso, consulte o Guia do Professor.*

Peça aos alunos que meçam o comprimento do túnel e a distância entre as duas semiretas no meio do trajeto. Sabendo que o erro de

Eupalinos foi menor que 1%, seus alunos deverão comparar o trabalho que fizeram com o de Eupalinos para analisar os erros cometidos. Possíveis razões para os desvios são a imprecisão nos instrumentos ou falhas no projeto. Nesta escala, até a espessura das semirretas traçadas influenciam em desvios.

Auditoria externa
Quando terminarem a autoanálise, faça com que um grupo analise o projeto de outro. Para isso, os auditores devem preencher com críticas e avaliações o formulário do projeto dos colegas, apontando inclusive as possíveis melhorias na proposta auditada.

Fechamento

A seguir apresentamos a solução de Eupalinos. No fechamento da aula ilustre na lousa e apresente as justificativas para cada um dos passos.

A solução de Eupalinos
Chamemos os pontos escolhidos no perímetro da montanha de A e B. A partir do ponto B, faça um segmento de reta na direção oeste, por exemplo, e trace então uma poligonal como na FIGURA 6, tal que o ângulo entre os segmentos seja sempre de $90°$.

* *Para obter os ângulos retos usamos o esquadro. Além disso, de acordo com o contorno da montanha, pode ser necessário um maior ou menor número de segmentos.*

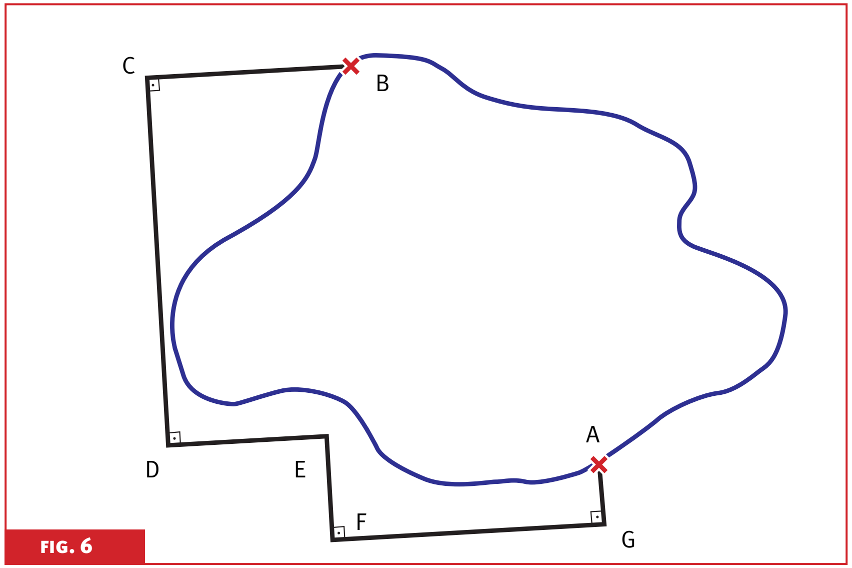


FIG. 6

Meça os segmentos traçados anotando os deslocamentos na vertical e na horizontal. Com essas medidas, e considerando o ponto X indicado na figura abaixo, obteremos: $AX = DE + FG - CB$ e $XB = CD + EF - GA$, que são as medidas dos catetos do triângulo retângulo BXA.

Assim, esses valores indicarão os lados do maior triângulo destacado na FIGURA 7:

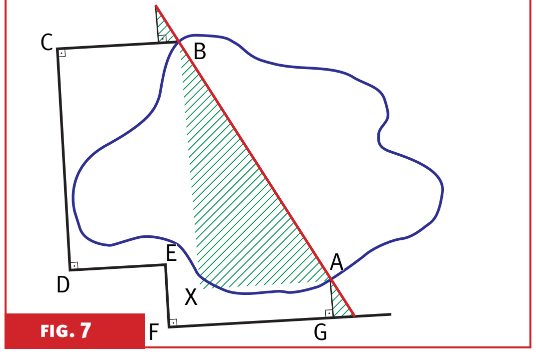


FIG. 7

Para o próximo passo vamos usar o seguinte teorema:

Teorema de semelhança Lado Ângulo Lado (L.A.L.)

Dados dois triângulos ABC e DEF, se

$$\hat{A} \simeq \hat{D} \text{ e } \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}},$$

então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

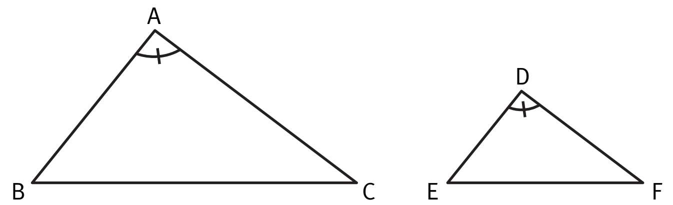


FIG. 8 *Ilustração do teorema de semelhança LAL.*

Construímos dois triângulos retângulos auxiliares KJB e AGH, como na FIGURA 9, tais que as razões $\frac{\overline{JK}}{\overline{JB}}$ e $\frac{\overline{GA}}{\overline{GH}}$ entre seus catetos sejam iguais à razão $\frac{\overline{XB}}{\overline{AX}}$ entre os catetos correspondentes do triângulo BXA.

A partir dessa construção, usando o Teorema LAL de Semelhança de Triângulos, obtemos que os três triângulos, KJB, BXA e AGH, são dois a dois semelhantes.

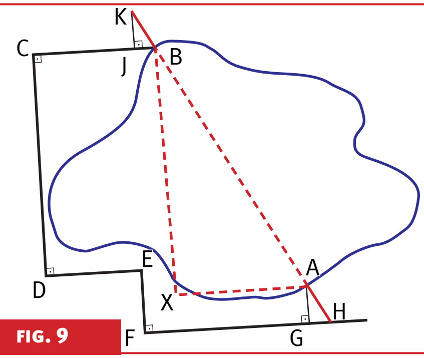


FIG. 9

Se conseguirmos provar que suas hipotenusas estão contidas em uma mesma reta, teremos a direção da escavação do túnel!

Fazendo por partes, obteremos inicialmente que AB e BK estão na mesma reta. Lembremos que os ângulos $J\hat{B}K$ e $A\hat{B}X$ são complementares, por serem ângulos respectivamente congruentes aos dois ângulos agudos de um triângulo retângulo.

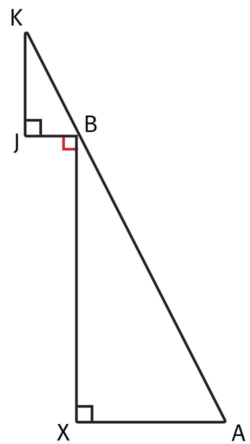


FIG. 10

A soma de suas medidas com a do ângulo $J\hat{B}X$, que é reto, é igual a $180°$, o que implica que os pontos K, A e B são colineares. Com procedimento análogo, para o par de triângulos BXA e AGH completaremos o resultado.

Por conta das imprecisões apontadas anteriormente, são grandes as chances de que os traçados obtidos para as direções das escavações e que passam por A e B não se encontrem. Retome com os alunos a discussão sobre os erros obtidos e compare os resultados da sala com o da construção de Eupalinos.

Caso algum grupo apresente soluções alternativas, coloque em discussão com a sala e verifique se a proposta é valida. A solução que apresentamos não é a única possível. No Guia do Professor é possível encontrar alternativas, além de mais detalhes sobre as passagens matemáticas aqui expostas.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Luiz Fernando Giolo Alves

Coordenação de redação
Fabricio de Paula Silva

Revisores
Matemática
Antônio Carlos Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara de Oliveira

Fotógrafo
Augusto Fidalgo Yamamoto

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL