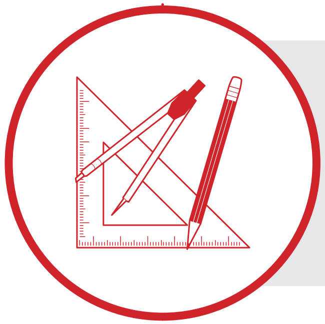
Matemática Multimídia

GEOMETRIA
E MEDIDAS

Guia do professor



Experimento

Empacotamento de latas

Objetivo da unidade
Estudar área e comprimento de setores circulares através de um problema de otimização.

UNICAMP

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Empacotamento de latas

Guia do professor

Sinopse

Neste experimento, os alunos tentarão descobrir qual deve ser a disposição de uma quantidade fixa de latas, de forma que o custo para embalá-las seja o menor possível. Para solucionar este problema, eles deverão calcular a quantidade de embalagem usando geometria plana.

Conteúdos

- Geometria Espacial: Problemas de Otimização;
- Geometria Plana: Áreas e Perímetros.

Objetivo

Estudar área e comprimento de setores circulares através de um problema de otimização.

Duração

Uma aula dupla.

Matemática Multimídia

Introdução

A sociedade moderna já se acostumou com bebidas e alimentos em latas de formato cilíndrico de tamanho apropriado para o uso individual. As indústrias então têm o desafio de transportar grandes quantidades de latas. Para facilitar o transporte é comum pequenos fardos com várias latas e estas são transportadas em caminhões e navios.

A matemática tem ferramentas interessantes para otimizar o empacotamento de objetos. O problema mais simples envolve o agrupamento de círculos de mesmo raio no plano. Este problema serve para os nossos propósitos de agrupar latas cilíndricas que têm como seção perpendicular círculos.

Para os cálculos deste guia a altura de cada lata não é um fator importante. O experimento calcula a área total da embalagem, mas para efeitos de descobrir qual a configuração de menor custo, basta calcularmos a área da base. Desprezamos também a espessura do material que vai envolver as latinhas.

Motivação

Este problema tem o contexto muito interessante e importante de forma que os alunos podem perceber a importância de saber calcular a área de figuras planas.

Neste experimento, os alunos irão solucionar um problema de otimização que envolve a embalagem de latas: qual é a disposição de uma quantidade fixa de latas que fornece o menor custo possível de embalagem?

É claro que as latinhas devem encostar umas às outras e não podem ser amassadas. Em termos formais, os círculos não se sobrepõem, mas não deve haver nem um círculo isolado (exceto o caso trivial de uma única latinha). Além do mais o material de empacotamento adere ao contorno de parte de uma latinha, mas ao passar de uma latinha para a outra o material vai sair pela tangente de um círculo e chegar ao outro círculo também em tangente. Estas condições matemáticas são satisfeitas aproximadamente no experimento prático.

O experimento

Etapa 1 **Disposição das latas**

Cada equipe deverá criar três disposições diferentes para o número de latinhas que decidiu embalar. Este número deverá estar entre 3 e 12. Pra cada quantidade os alunos devem imaginar três embalagens distintas.

O caso de uma única latinha é trivial. Os outros casos vamos ver abaixo qual é a melhor disposição para minimizar o perímetro da embalagem externa que empacota as latinhas.

Etapa 2 **Verificação da embalagem de menor custo**

Depois que forem definidas as formas de empacotamento das latas será preciso calcular a área total da superfície das embalagens escolhidas.

Este experimento considera que a embalagem pode fazer contorno em torno das latas externas e é esticada entre uma e outra.

A embalagem de menor custo será aquela de menor área total.

A primeira intuição que se coloca é observar a configuração com maior densidade de latinhas, isto é, com o menor “espaço vago” possível.

Considerando todas as latinhas de mesma altura H, o volume do pacote com várias latinhas será dado por $V = A_b H$ onde A_b é a área da base. Por sua vez, a área da base vai ser a área dos círculos das latinhas mais a área correspondente às regiões vazias, digamos A_v. Considerando Q latinhas no pacote, temos a área da base $A_b = Q\pi R^2 + A_v$.

Vamos definir a densidade relativa ρ (rô) pela razão entre o volume das latinhas e o volume total do pacote

$$\rho = \frac{Q\pi R^2 H}{A_b H} = \frac{Q\pi R^2}{Q\pi R^2 + A_v} = \frac{1}{1 + \frac{A_v}{Q\pi R^2}}$$

Daí concluímos que a maior densidade será obtida pela menor razão $A_v/(Q\pi R^2)$.

Vamos ver que, com esta configuração na qual todas as latinhas têm o mesmo raio e mesma altura e são colocadas lado a lado, e não uma sobre a outra, e sem sobras, a maior densidade não é suficiente para garantir a menor área da embalagem externa.

O objetivo deste experimento é encontrar uma configuração que tenha a menor área total da embalagem possível. Considere p o perímetro da embalagem. Então a área total é $A_T = 2A_b + pH$.

O custo efetivo da embalagem pode ser medida pela razão entre a área total A_T e a quantidade de latinhas Q. Vamos denotar por η (éta) esta área por latinha

$$\eta = \frac{A_t}{Q} = \frac{2A_b + pH}{Q} = \frac{2(Q\pi R^2 + A_b)}{Q} = 2\pi R^2 + \frac{2A_v + pH}{Q}.$$

Assim, os desafios do experimento são os cálculos das áreas vazias A_v e dos perímetro externo p.

No caso trivial de uma latinha, a densidade relativa é $\rho = 1$ e área por latinha é $\eta = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R(R + H)$.

Vamos considerar, como no experimento, as medidas $R = 3{,}5\,\mathrm{cm}$ e $H = 12{,}5\,\mathrm{cm}$.

Duas latas

O caso de duas latinhas é simples e só tem uma configuração possível. Basta observar dois círculos que se tocam, de mesmo raio R, e o quadrado de lado $2R$.

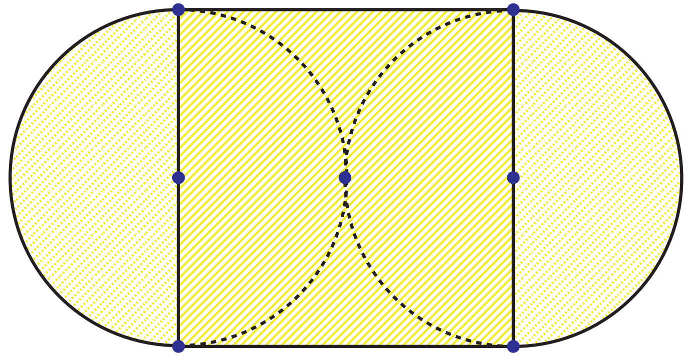


FIG. 1 *Dois círculos em contato.*

Há duas regiões vazias e a sua área é dada pela diferença entre a área do quadrado $4R^2$ e a área dos dois semicírculos πR^2.

Vamos denotar por A_{dc} o valor desta área vazia limitada por dois arcos e um segmento de reta $A_{dc} = (4 - \pi)R^2/2$.

Assim $A_v = 2A_{dc}$. O perímetro da embalagem é composto pelos dois semiarcos de círculos e os dois segmentos de reta que unem os pontos tangentes entre os círculos. Cada segmento de reta tem comprimento $2R$. Assim $p = 2\pi R + 4R$.

E a densidade relativa para este empacotamento de duas latinhas é

$$\rho = \frac{1}{1+\frac{A_v}{Q\pi R^2}} = \frac{1}{1+\frac{(4-\pi)R^2}{2\pi R}} = \frac{2\pi}{(\pi+4)}$$

que é aproximadamente $0,88$. E área por latinha é

$$\eta = 2\pi R^2 + \frac{2A_v + pH}{Q} = 2\pi R^2 + \frac{2(4-\pi)R^2 + (4R+2\pi R)H}{2} =$$

$$= (\pi+4)R^2 + (2+\pi)RH$$

que vale aproximadamente $277,4\,\mathrm{cm}^2$.

Três latas

No caso de três latinhas podemos perceber pelo menos duas possibilidades.

No caso das três latinhas alinhas, há dois pares de espaços vazios de área A_{dc} cada uma e o perímetro é $p = 2\pi R + 8R$. Assim a densidade relativa é dada por

$$\rho = \frac{3\pi R^2}{3\pi R^2 + 2(4-\pi)R^2} = \frac{3\pi}{\pi+8}$$

que é aproximadamente $0,85$; e a área por latinha é

$$\eta = 2\pi R^2 + \frac{2A_v + pH}{Q} = 2\pi R^2 + \frac{4(4-\pi)R^2 + (8R+2\pi R)H}{3} =$$

$$= \frac{2\pi+16}{3}R^2 + \frac{8+2\pi}{3}RH$$

que é aproximadamente $299,3\,\mathrm{cm}^2$.

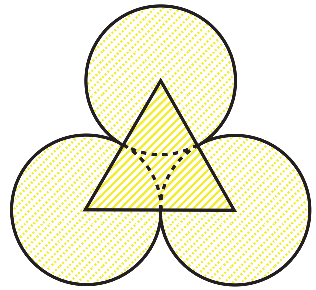


FIG. 2 *Três círculos em contato.*

No caso das 3 latas em forma triangular equilátera temos os três espaços vazios externos e um interno. Para calcular a área da região vazia interna, incluímos o triângulo equilátero de lado $2R$ com os vértices nos centros dos círculos como na ilustração. A área deste triângulo equilátero é $\sqrt{3}R^2$ e nele estão contidos três fatias de $1/6$ de círculos. A área destas três fatias é a área de um semicírculo, isto é, $\pi R^2/2$.

Assim, a região interna limitada pelos três arcos de círculo tem área

$$A_c = \left(\sqrt{3} - \pi/2\right) R^2.$$

Portanto a área das regiões vazias, é a soma $A_c + 3A_{dc}$, ou melhor $A_v = 3(4-\pi)R^2/2 = (6+\sqrt{3}-2\pi)R^2$ e desta forma a densidade relativa é dada por

$$\rho = \frac{3\pi R^2}{(3\pi+6+\sqrt{3}-2\pi)R^2} = \frac{3\pi}{(6+\sqrt{3}+\pi)}$$

que é aproximadamente $0,87$. O perímetro $p = 2\pi R + 6R$ e portanto a área por latinha é

$$\eta = 2\pi R^2 + \frac{2A_v + pH}{Q} = \frac{2}{3} R \left(\left(\pi + 6 + \sqrt{3} \right) R + \left(\pi + 3 \right) H \right)$$

que é aproximadamente $267,9\,\mathrm{cm}^2$.

Concluímos que a configuração triangular vai ser a mais econômica, em termos de embalagem, para o empacotamento de três latinhas pois a densidade relativa é a maior e a área por latinha é a menor.

Quatro latas

Vamos analisar duas configurações, a quadrada e a intercalada no estilo da triangular anterior.

A configuração quadrada (vide FIGURA 3) possui quatro espaços vazios de área A_{dc} cada uma e um espaço vazio interno equivalente a duas vezes a área A_{dc}. Assim o fechamento da embalagem vai ter uma região vazia cuja área da base vale $A_v = 6A_{dc}$. O perímetro $p = 2\pi R + 8R$. Substituindo na densidade e na área efetiva, temos

$$\rho = \frac{4\pi}{\pi + 12} \text{ e } \eta = \frac{R}{2} \left(\left(\pi + 12 \right) R + \left(\pi + 4 \right) H \right)$$

que valem aproximadamente $0,83$ e $248,9\,\mathrm{cm}^2$, respectivamente.

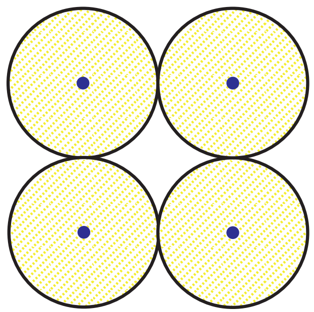


FIG. 3 *Quatro círculos em configuração quadrada.*

A configuração triangular (vide ilustração a seguir) possui quatro espaços vazios de área A_{dc} cada uma e dois espaços vazios internos de área A_c cada uma. Assim o fechamento da embalagem vai ter uma região vazia cuja área da base vale $A_v = 4A_{dc} + 2A_c$. O perímetro vai ser o mesmo $p = 2\pi R + 8R$. Substituindo na densidade e na área efetiva, temos

$$\rho = \frac{4\pi}{\pi + 8 + 2\sqrt{3}} \text{ e } \eta = \frac{R}{2} \left(\left(\pi + 8 + 2\sqrt{3} \right) R + \left(\pi + 4 \right) H \right)$$

que valem aproximadamente $0,86$ e $245,7\,\mathrm{cm}^2$, respectivamente.

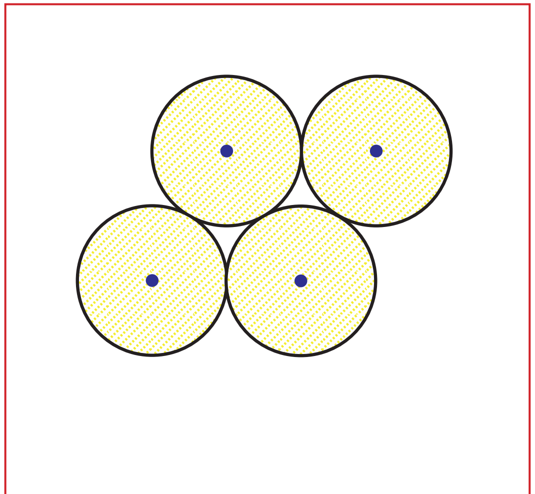


FIG. 4 *4 círculos em contato. 3 em 3 em formação triangular.*

Destas duas configurações, a formação triangular é a mais eficiente tanto por ter maior densidade relativa quanto consumir embalagem para o empacotamento.

Seis latas

Disposição 1: As latinhas foram dispostas em formação quadrada.

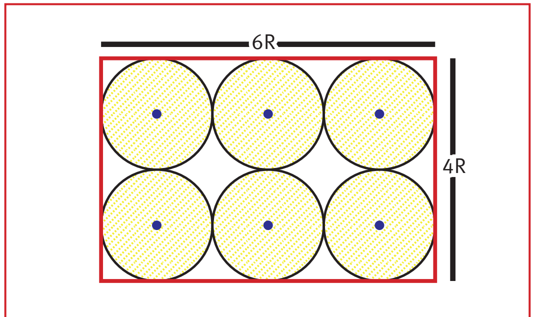


FIG. 5 *6 círculos em formação quadrada.*

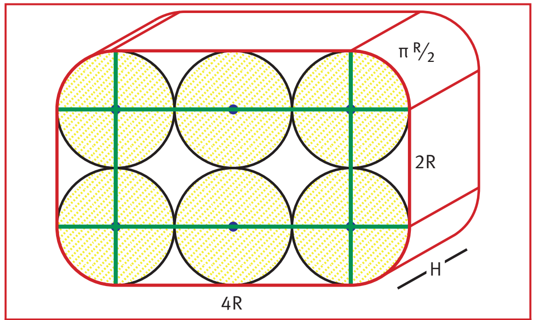


FIG. 6 *6 círculos em formação quadrada.*

A área das regiões vazias é a soma de dez vezes A_{dc} e a densidade relativa desta disposição é

$$\rho = \frac{6\pi}{6\pi + 5(4-\pi)} = \frac{6\pi}{\pi + 20}$$

e a área efetiva é

$$\eta = \frac{R}{3}((\pi + 20)R + (\pi + 6)H)$$

que valem aproximadamente $0,81$ e $227,8\,\mathrm{cm}^2$, respectivamente.

Considerando a disposição 2: As latinhas foram dispostas conforme a FIGURA 7.

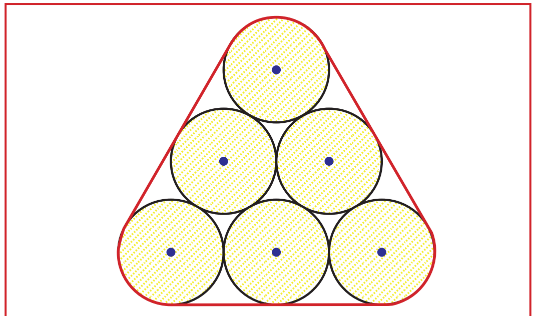


FIG. 7 *6 círculos em formação triangular.*

A área das regiões vazias é a soma de seis vezes A_{dc} mais quatro vezes A_v e o perímetro é $p = 2\pi R + 12R$. Assim a densidade relativa desta disposição é

$$\rho = \frac{6\pi}{6\pi + 3(4-\pi) + 4\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{6\pi}{\pi + 12 + 4\sqrt{3}}$$

a área efetiva é

$$\eta = \tfrac{R}{3}\left(\left(\pi + 12 + 4\sqrt{3}\right) + (\pi + 6)H\right)$$

que valem aproximadamente $0,85$ e $223,4\,\mathrm{cm}^2$, respectivamente.

Considerando a disposição 3: As latinhas foram dispostas conforme a FIGURA 8.

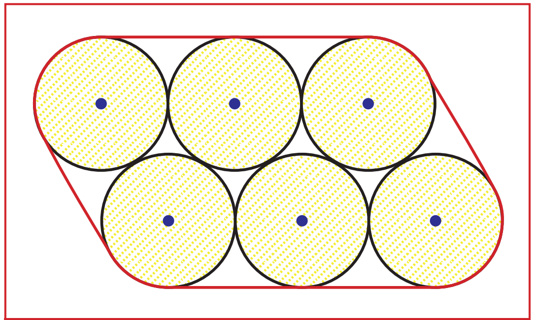


FIG. 8 *6 círculos em formação triangular 3 a 3.*

A área das regiões vazias é a soma de seis vezes A_{dc} mais quatro vezes A_v e o perímetro é $p = 2\pi R + 12R$.

Assim a densidade relativa e a área efetiva das disposições 2 e 3 de seis latinhas são as mesmas e são melhores do que as da disposição 1 que é quadrada.

Sete latas

Vamos mostrar apenas o caso hexagonal, isto é, uma central e seis latas em contato exato, como na FIGURA 9. Se os centros dos círculos externos forem conectados por segmentos de reta, teremos um hexágono regular de lado $2R$. Pode-se mostrar que, para sete latas, esta é a disposição mais econômica em termos de embalagem e de densidade relativa.

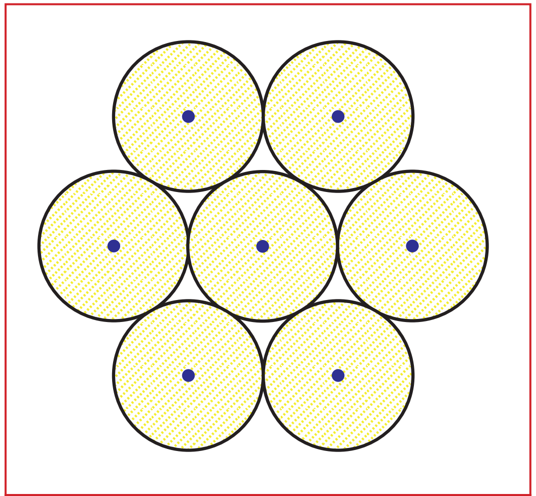


FIG. 9 *7 círculos em formação triangular 3 a 3 ou formação hexagonal externa*

A área das regiões vazias é a soma de seis vezes A_{dc} mais seis vezes A_v e o perímetro é $p = 2\pi R + 12R$. Assim a densidade relativa desta disposição é

$$\rho = \frac{7\pi}{\pi + 12 + 6\sqrt{3}}$$

a área efetiva é

$$\eta = \tfrac{2R}{7}\left(\left(\pi + 12 + 6\sqrt{3}\right)R + (\pi + 6)H\right)$$

que valem aproximadamente $0,86$ e $203,6\,\mathrm{cm}^2$, respectivamente.

Mais que sete latas

A estratégia é minimizar as áreas vazias da base e o perímetro. Pode-se mostrar que, para configurações planas, isto é, sem considerar latas sob latas, minimizamos as áreas vazias se preenchermos o plano na forma triangular básica. A forma quadrada não é ótima neste contexto.

Por outro lado, ter o menor perímetro para uma dada área é análogo a ter a maior área para determinado perímetro. Podemos mencionar (sem demonstrar) três teoremas importantes para este problema.

1. De todos os polígonos de mesmo perímetro, os regulares são os que possuem a maior área.
2. Os polígonos regulares de mesmo perímetro têm o valor da área tão maior quanto for o número de lados.
3. O círculo é a figura plana de maior área, para um determinado perímetro.

Estes teoremas servem de sugestão para as melhores disposições. Para evitar colocar muitas ilustrações, vamos pensar nas disposições em latas por fileiras, mas sempre na disposição triangular básica de encaixe.

Assim o caso das seis latas verificamos que a disposição $6=3+2+1$ é equivalente à disposição $6=3+3$. Com este recurso podemos considerar:

- Oito latas. Podemos pensar na disposição linear, $4+4$, $4+3+1$ ou $1+3+3+1$. Nenhuma delas permite uma disposição regular. Qual é a melhor?
- Nove latas. Sugerimos avaliar o caso $3+3+3$ em disposição triangular como na disposição 3 do caso de seis latas. Pode-se comparar com o caso $1+2+3+2+1$.
- Dez latas. Esta quantidade de latas permite uma configuração triangular equilátera. Basta encaixar as latas na disposição $4+3+2+1$.
- Onze latas. Podemos explorar as configurações a partir do caso ótimo das sete latas, mas nenhuma permite uma disposição regular. Qual é a melhor?
- Doze latas. Este caso é relevante pois é uma quantidade padrão de empacotamento. Com base no que aprendemos com seis latas, a configuração para avaliar é a $3+3+3+3$, que é equivalente a $4+4+4$.

Fechamento

Vimos que para efeito de empacotamento, algumas disposições vão ser mais econômicas em termos de área total da embalagem.

Convém observar que os números conhecidos como números triangulares permitem disposições de latas com as melhores disposições.

Os números triangulares são 1, 3, 6, 10, 15 e são definidos como a quantidade de combinações de $n+1$ objetos podem ser feitas dois a dois, isto é, $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Curiosidade

A ABRE – Associação Brasileira de Embalagem por meio de seu Comitê de Meio Ambiente e Sustentabilidade assumiu o desafio de desenvolver as diretrizes de sustentabilidade para a cadeia produtiva de embalagens e bens de consumo. Ela orienta que a embalagem deve ser desenvolvida observando-se os seguintes aspectos: aspectos técnicos, produção, funcionalidade; aspectos regulatórios, legislação e certificações; aspectos estéticos; aspectos mercadológicos e econômicos; aspectos ambientais, que devem estar alinhados ao conceito fundamental dos 3Rs – Reduzir, Reutilizar e Reciclar.

Variações

Considerar o empacotamento de esferas de mesmo raio. Por exemplo, laranjas de mesmo tamanho.

Em 1649, Newton entrou numa disputa com outro cientista britânico, Gregory, para resolver o que ficou conhecido como o problema oscular (do beijo ou do contato). Entende-se por ósculo ou beijo o contato entre bolas de bilhar ou sinuca ou equivalentemente, o agrupamento de balas de canhão de forma que todas as hipotéticas esferas de mesmo raio estejam em contato duas a duas e uma esfera central toque em todas as esferas ao seu redor.

O problema oscular em duas dimensões já apareceu neste Guia no empacotamento de 7 latas. Nesta configuração hexagonal todos os 6 círculos externos tocam o círculo interno.

O problema que atormentou Newton e Gregory foi o de considerar esferas no espaço tridimensional. Quantas esferas (eles estavam pensando em estrelas esféricas) poderiam tocar uma esfera central? Newton argumentava que deveriam ser 12 e Gregory conjecturou que poderiam ser 13. A experiência ficou ao lado de Newton, mas a demonstração matemática definitiva só aconteceu em 1953, mais de três séculos depois.

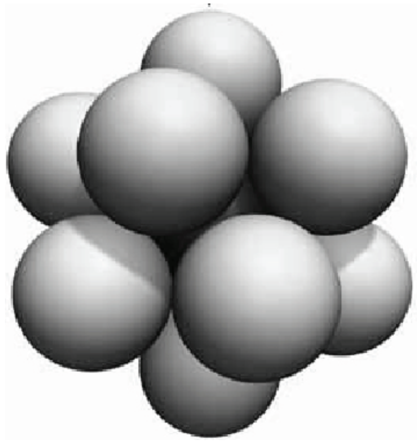


FIG. 9 *Número de Newton: Considerando 13 esferas de mesmo raio, é possível arranjá-las de forma que todas as 12 toquem a esfera central.*

Assim, o empacotamento ideal de esferas de mesmo raios teria 13 esferas arranjadas como na ilustração acima.

Bibliografia

Queiroz, Maria L. B.; Rezende, Eliane Q. F. **Geometria euclidana plana e construções geométricas**. Campinas: Editora Unicamp, 2009.

Dante, Luiz R. **Matemática: Livro do professor**, 2ª série. São Paulo: Ática, 2004.

Szpiro, George. **Newton and the kissing problem**, Plus Magazine, London. *http://plus.maths.org/issue23/features/kissing/index.html*. January/2003. Visitado em 7 de junho de 2010.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autores
Maria Inês Sparrapan Muniz,
Miriam Sampiere Santinho
e Samuel Rocha de Oliveira

Revisores
Matemática
Antônio Carlos Patrocínio
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara de Oliveira

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal