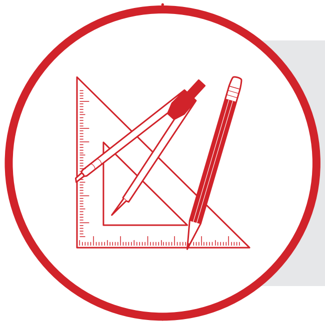
Matemática Multimídia

GEOMETRIA
E MEDIDAS

O EXPERIMENTO



Experimento

Empacotamento de latas

Objetivo da unidade
Estudar área e comprimento de setores circulares através de um problema de otimização.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Empacotamento de latas

O experimento

Sinopse
Neste experimento, os alunos tentarão descobrir qual deve ser a disposição de uma quantidade fixa de latas, de forma que o custo para embalá-las seja o menor possível. Para solucionar este problema, eles deverão calcular a quantidade de embalagem usando geometria plana.

Conteúdos
- Geometria Espacial: Problemas de Otimização;
- Geometria Plana: Áreas e Perímetros.

Objetivo
Estudar área e comprimento de setores circulares através de um problema de otimização.

Duração
Uma aula dupla.

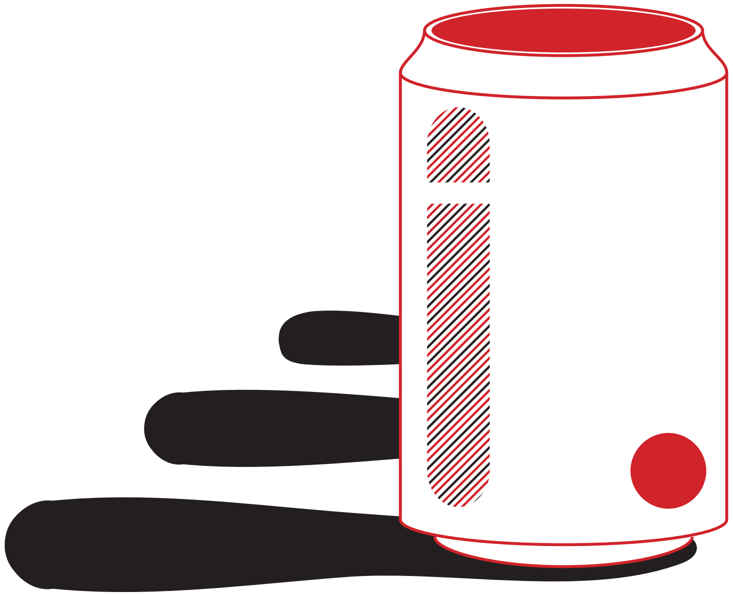
Matemática Multimídia

Introdução

Neste experimento, os alunos tentarão solucionar um problema de otimização que envolve a embalagem de latas de alumínio: qual disposição de uma quantidade fixa de latas fornece o menor custo possível de embalagem? Para isso, serão utilizados conceitos de geometria plana, como, por exemplo, área e comprimento de setores circulares.

Minimizar o custo despendido com a embalagem de certo produto é um objetivo frequente nas indústrias e este experimento o leva para a sala de aula. Porém, as indústrias acabam levando em conta outros fatores, tais como: transporte, aparência, diferenciação em relação a outras marcas etc.

O problema deste experimento considera apenas o custo. Devido a isso, a resposta do problema poderá surpreender os alunos.



O Experimento

Material necessário

- Latas de alumínio;
- Calculadora;
- Régua;
- Folha de caderno;
- Compasso;
- Lápis;
- Borracha.

FIG. 1

Problema

Formulação do problema

Dada uma *quantidade fixa de latas*, todas iguais, qual a disposição minimiza o custo para embalá-las ?

A embalagem de cada caixa deve cobrir as latas por completo e estar ajustada aos seus contornos.

Note que o custo será o menor possível quando a área superficial da embalagem em uma dada disposição das latas também for a menor possível.

Preparação

Na aula anterior à realização do experimento, peça para que cada aluno traga de casa 4 latas de alumínio. Depois, na realização do experimento, divida os alunos em trios, entregue-lhes uma Folha do Aluno e o restante do material necessário .

Assim que a classe estiver organizada, explique o problema a ser resolvido e o que eles devem considerar. Neste experimento

* *Padronize o tipo de lata que os alunos devem trazer, pois isso é essencial para o experimento!*

eles deverão estar atentos a dois problemas: o primeiro é encontrar a disposição que minimiza o custo para embalar uma quantidade fixa de latas; o segundo, no final do experimento, é encontrar, dentre todas as possíveis escolhas, aquela que minimiza o custo de embalagem por lata.

A seguir, peça para que os grupos escolham uma quantidade entre 3 e 12 latas para formar suas embalagens. Nesta etapa, o importante é obter uma grande variedade entre os grupos para o FECHAMENTO do experimento. É necessário, portanto, que cada grupo escolha quantidades diferentes de latas.

Disposição das latas

ETAPA 1

Nesta etapa, os alunos apenas deverão definir três disposições para a quantidade de latas (Q) que escolheram com o objetivo de solucionar o problema apresentado anteriormente. Logo que determinarem cada uma das posições, peça para que eles as registrem no caderno, como mostrado na FIGURA 2, e as numere de 1 a 3.

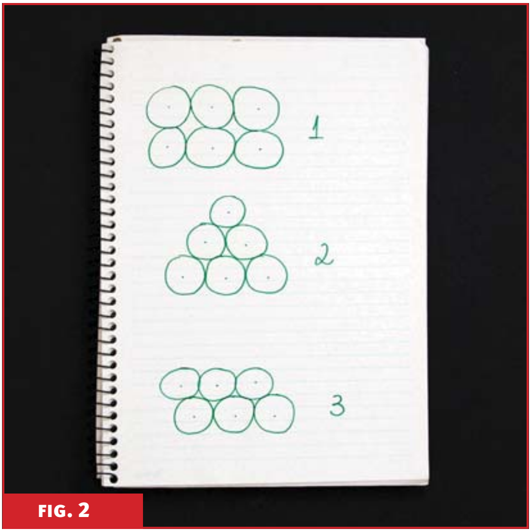


FIG. 2

Verificação da embalagem de menor custo

ETAPA 2

Nesta etapa, os alunos verificarão qual das disposições que escolheram para as latas traz o menor custo de embalagem. Para isso, baseando-se no registro das disposições feito na ETAPA 1, eles deverão calcular a área superficial (A). Entretanto, antes de fazer os cálculos, é necessário que os alunos descubram a altura H e o raio R da lata de alumínio. Neste momento, auxilie-os e observe que o raio da lata não é o raio das bases das latas.

* *Verifique se os alunos estão fazendo os cálculos certos, pois isso facilitará o FECHAMENTO.*

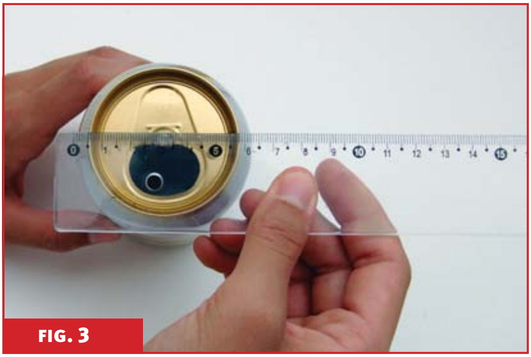


FIG. 3

Os alunos deverão anotar todos os dados obtidos em uma tabela semelhante à TABELA 1.

Quantidade de latas (Q): 6	Altura (H): 12,5 cm Raio (R): 3,5 cm
Disposição	**Área (A) (cm²)**
1	1366,67
2	1340,6
3	1340,6

TABELA 1 *Dados obtidos a partir de uma lata de refrigerante.*

Adiante seguem os cálculos das disposições 1, 2 e 3, mostradas nas FIGURAS 4, 5 e 6. Para outra quantidade de latas e outras disposições, os cálculos devem seguir um raciocínio análogo.

! *Padronize a medida do raio R e da altura H da lata, pois no FECHAMENTO os alunos irão comparar os resultados.*

FIG. 4 *Disposição 1.*

FIG. 5 *Disposição 2.*

FIG. 6 *Disposição 3.*

Disposição 1

A base da embalagem da Disposição 1, é a seguinte:

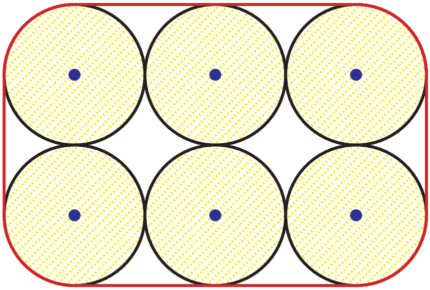


Fig. 7 *Área da base da embalagem.*

Para calcular sua área, construímos um retângulo de comprimento $6R$ e largura $4R$ circunscrevendo as circunferências e, depois, fazemos quadrados de lado R como mostrado na FIGURA 9.

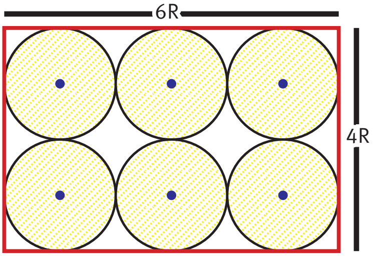


Fig. 8

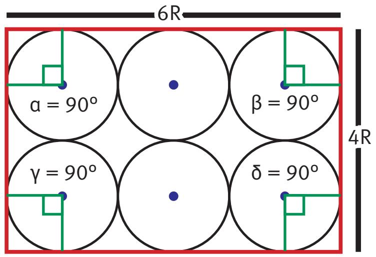


FIG. 9

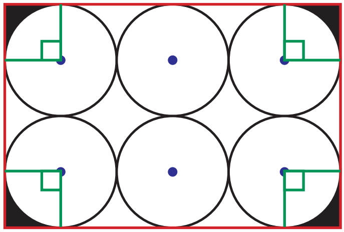


FIG. 10

Agora, para obter a área da base A_b, basta subtrair a área pintada A_p da área do retângulo. Visto que A_p é quatro vezes a diferença entre a área do quadrado de lado R e a área do setor de 90º, temos que:

$$A_p = 4 \times \left(R^2 - \pi \times R^2 \times \left(\frac{90}{360} \right) \right) = 4 \times \left(R^2 - \pi \times R^2 \times \left(\frac{1}{4} \right) \right)$$

$$A_p = 4 \times \left(R^2 - \frac{(\pi \times R^2)}{4} \right) = 4 \times R^2 - (\pi \times R^2) = R^2 \times (4 - \pi)$$

$$A_b = 6R \times 4R - R^2 \times (4 - \pi) = 24R^2 - R^2 \times (4 - \pi) = R^2 \times (24 - 4 + \pi)$$

$$A_b = R^2 \times (20 + \pi) \approx 3{,}5^2 \times (20 + 3{,}14) \approx 283{,}64\,\mathrm{cm}^2$$

Já que possuímos a área da base A_b, o próximo passo é calcular área lateral A_L. Para isso, devemos imaginar um retângulo que tem largura igual ao perímetro da base da embalagem e comprimento igual à altura da lata; com isso, basta multiplicar o perímetro da base da embalagem pela sua altura.

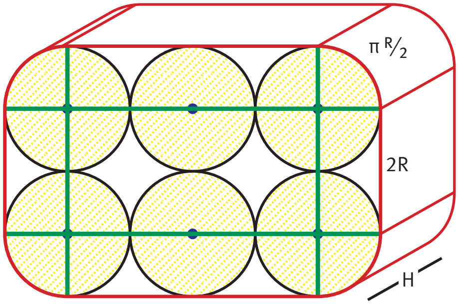


FIG. 11

$$A_L = \left(2 \times 4R + 2 \times 2R + 4 \times \left(\frac{\pi \times R}{2}\right)\right) \times H = (12R + 2 \times \pi \times R) \times H$$

$$A_L = R \times H \times (12 + 2 \times \pi) \approx 3{,}5 \times 12{,}5 \times (12 + 6{,}28)$$

$$A_L \approx 799{,}75\,\text{cm}^2$$

Uma vez que temos a área da base A_b da embalagem e a sua área lateral A_L, podemos calcular a área total A_T:

$$A_T = 2 \times A_b + A_L = 2 \times 283{,}46 + 799{,}75 =$$

$$= 566{,}92 + 799{,}75 \approx 1366{,}67\,\text{cm}^2$$

Disposição 2

Como na Disposição 1, primeiramente vamos calcular a área A_b da base da embalagem. A base da embalagem é a seguinte:

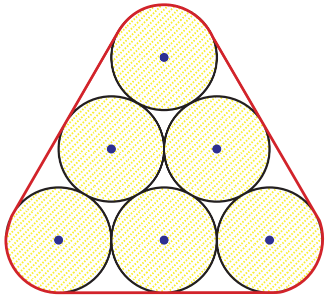


Fig. 12 *Área da base da embalagem.*

Como podemos ver pela FIGURA 13, A_b será dada pela soma da área do triângulo equilátero de lado $4R$ com a área de três retângulos de lado R e $4R$ e também com a área de três setores de 120°.

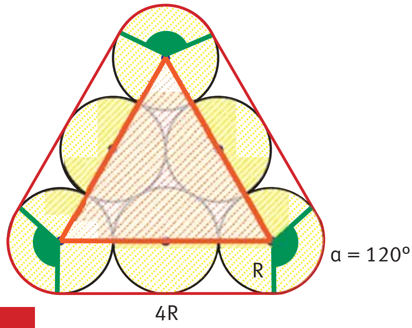


Fig. 13

Deste modo, temos que:

$$A_b = 3 \times 4R^2 + \frac{(16R^2 \times \sqrt{3})}{4} + 3 \times \left(\frac{(\pi \times R^2) \times 120}{360} \right)$$

$$A_b = 12R^2 + 4R^2 \times \sqrt{3} + \pi \times R^2 \approx 268,8\,\mathrm{cm}^2$$

Já que possuímos a área da base A_b, a área lateral A_L já pode ser calculada. Para isso, devemos multiplicar o perímetro da base da embalagem pela sua altura.

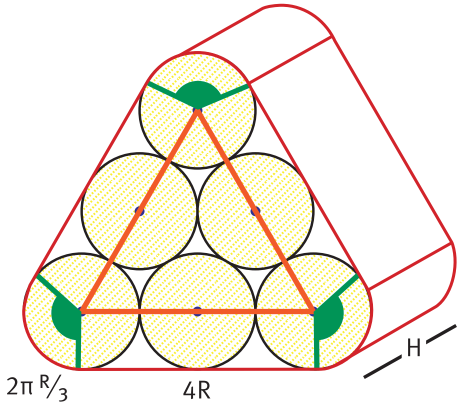


FIG. 14

$$A_L = \left(3 \times 4R + 3 \times \left(\frac{(2 \times \pi \times R)}{3} \right) \right) \times H = (12 \times R + 2 \times \pi \times R) \times H$$

$$A_L = R \times H \times (12 + 2 \times \pi) = 3,5 \times 12,5 \times 18,28 \approx 799,75\,\mathrm{cm}^2$$

Uma vez que temos a área da base A_b da embalagem e sua área lateral A_L, podemos calcular a área total A_T:

$$A_T = 2 \times A_b + A_L \approx 1340,6\,\mathrm{cm}^2$$

Disposição 3

Como na Disposição 1 e 2, primeiramente vamos calcular a área A_b da base da embalagem. A base da embalagem é a seguinte:

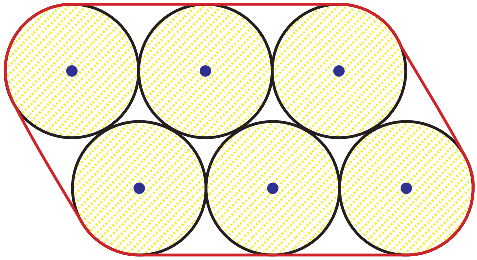


FIG. 15 *Área da base da embalagem.*

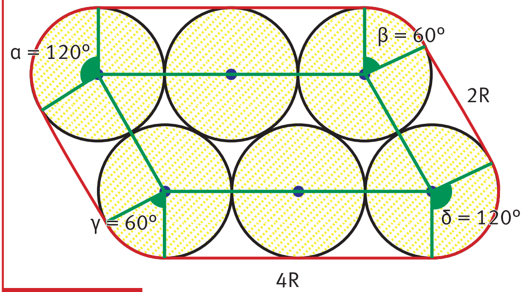


FIG. 16

Como podemos ver pela FIGURA 16, A_b será dada pela soma dos seguintes termos: (1) área do paralelogramo de base $4R$ e altura $R \times \sqrt{3}$, (2) área de dois retângulos de lado R e $4R$, (3) área de dois retângulos de lado $2R$ e R, (4) área de dois setores de 60° e (5) área de dois setores de 120°.

Na área dos setores circulares podemos notar que, juntos, eles formam um círculo completo de raio R. Sendo assim, sua contribuição para a área da base é igual à área deste círculo. Deste modo, temos que:

* *Observe que nas disposições anteriores poderíamos obter a área dos setores circulares desta mesma forma.*

$$A_b = R \times \sqrt{3} \times 4R + 2 \times (4R \times R) + 2 \times (2R \times R) + \left(\pi \times R^2\right)$$

$$A_b = 4 \times \sqrt{3} \times R^2 + 8R^2 + 4R^2 + \frac{2 \times (\pi \times R^2)}{3} + \frac{(\pi \times R^2)}{3}$$

$$A_b = (4 \times \sqrt{3} + 12)R^2 + \pi \times R^2$$

$$A_b \approx 270,35\,\mathrm{cm}^2$$

Apesar de possuirmos a área da base A_b, ainda falta calcular a área lateral A_L. Para isso, devemos multiplicar o perímetro da base da embalagem pela sua altura.

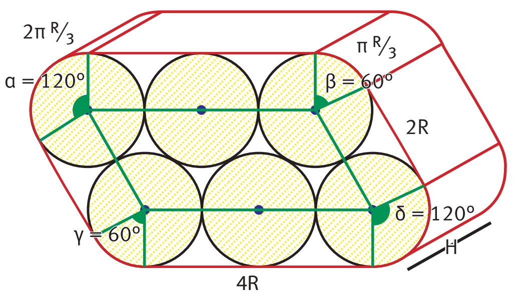


FIG. 17

$$A_L = \left(2 \times 4R + 2 \times 2R + \frac{2 \times (2\pi \times R)}{3} + \frac{2 \times (\pi \times R)}{3}\right) \times H$$

$$A_L = (12R + 2\pi \times R) \times H = (12 + 2\pi) \times H \times R$$

$$A_L \approx 799{,}75\,\text{cm}^2$$

Uma vez que temos a área da base A_b da embalagem e sua área lateral A_L, podemos calcular a área total A_T:

$$A_T = 2 \times A_b + A_L \approx 1340{,}6\,\text{cm}^2.$$

Logo que os grupos encontrarem a disposição que traz o menor custo de embalagem, eles deverão calcular o custo de embalagem por lata, ou seja, A/Q. Este dado será usado no Fechamento.

Fechamento

Quando os grupos acabarem de fazer os cálculos da Etapa 2, peça para que cada um deles diga a quantidade de latas com que estudou o problema e a disposição que resultou no menor custo de embalagem. Anote todas as informações na lousa e, caso alguns grupos tenham estudado o problema com a mesma quantidade de latas, anote apenas aquela disposição que dentre todas oferece a embalagem de menor custo.

Logo que reunir todos os dados na lousa, peça para que os grupos exponham qual foi o custo de embalagem por lata, ou seja, qual o resultado da divisão da área superficial da embalagem pela quantidade de latas, A/Q. Com esse dado será possível verificar qual das disposições oferece o menor custo por unidade embalada.

Depois que determinar a melhor disposição, promova a seguinte discussão:

Questão para os alunos

Por que a melhor disposição encontrada não é aquela que as empresas usam para embalar as latas?

* *Para saber mais sobre a otimização de embalagens, veja o* GUIA DO PROFESSOR*!*

Como citamos na Introdução, além da disposição das latas, existem outros fatores que são considerados, como, por exemplo, o transporte: o que será mais simples para acomodar na carroceria de um caminhão, um pacote retangular ou hexagonal?

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Cristiano Torezzan

Coordenação de redação
Rita Santos Guimarães

Redação
Thaisa Aluani

Revisores
Matemática
Antônio Carlos Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara de Oliveira

Fotógrafo
Augusto Fidalgo Yamamoto

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância
Ministério da Ciência e Tecnologia
Ministério da Educação
Governo Federal