Matemática Multimídia

NÚMEROS
E FUNÇÕES

Guia do professor

# Experimento

## Corrida ao 100

**Objetivo da unidade**
Apresentar de forma lúdica o conceito de Progressão Aritmética.

UNICAMP

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

# Corrida ao 100

## Guia do professor

**Sinopse**
Esta atividade consiste em um jogo no qual os alunos deverão criar uma estratégia que os permita vencer as partidas. Para isso, eles serão induzidos a obter uma sequência de jogadas que, ao fim da atividade, será explorada como uma Progressão Aritmética.

**Conteúdo**
Sequências: Progressão Aritmética.

**Objetivo**
Apresentar de forma lúdica o conceito de Progressão Aritmética.

**Duração**
Uma aula simples.

Matemática Multimídia

# Introdução

A abstração matemática pode, muitas vezes, desestimular alguns alunos: o caráter conceitual da disciplina pode ser um obstáculo no processo de aprendizagem. Tentando contornar esse problema, formulamos um experimento que explora o conteúdo matemático de forma lúdica, o que acreditamos poder auxiliar nesse processo. Com o objetivo de desenvolver a noção de Progressão Aritmética, criamos um jogo desafiador que pode facilitar o entendimento desse conceito.

Para alcançar o objetivo do jogo, o aluno é levado a mobilizar conceitos, como o de sequência e o de divisibilidade, além de desenvolver e formular uma regra geral que permite encontrar a sequência que garante ao aluno ganhar a partida.

A noção de Progressão Aritmética, então, surge de forma implícita e se torna objeto matemático com sua formalização posterior. O jogo serve também de base para a construção de novos conhecimentos sobre sequências numéricas em sala de aula.

# Motivação

A geração de sequências tem despertado a curiosidade do ser humano desde a antiguidade. Podemos perceber isso através das figuras que geram padrões na cerâmica indígena.

A curiosidade acerca dessas sequências numéricas também é muito antiga na humanidade: são famosos os *números geométricos* desenvolvidos pelos gregos. O uso de sequências como essas em sala de aula visa motivar os alunos.

Neste experimento, o desafio do jogo é fazer com que as duplas de alunos encontrem, por meio de cálculos, estratégias para ganhar da dupla adversária *sempre*. Para tanto, esperamos que as duplas consigam explicitar as sequências numéricas que serão formalizadas posteriormente pelo professor.

# O experimento

**Comentários iniciais**

Para que o experimento tenha êxito é imprescindível que o professor leia com os alunos as regras do jogo e os acompanhe, orientando as equipes em todas as etapas, sem interferir de forma explícita no raciocínio dos alunos.

## Etapa 1 **Primeira rodada**

Peça para que cada equipe discuta qual é a melhor estratégia para se obter a vitória *antes* que iniciem a rodada. A seguir, os alunos deverão realizar cinco partidas, sendo que cada uma delas utilizará uma das cinco cartelas disponíveis no Anexo. Os alunos não devem discutir as estratégias antes do término das partidas.

Pretendemos que as duplas reconheçam, no decorrer das cinco partidas, que o número $100-(p+1)$ é um número estratégico para uma sequência vencedora. Ele será o penúltimo número a ser preenchido e, consequentemente, o antepenúltimo será $100-(p+1)-(p+1)$ ou $100-2(p+1)$, ou seja, basta realizar sucessivas retiradas de $(p+1)$ do número $100$ até obter o maior número natural menor que $(p+1)$. Nesta etapa os alunos ainda não devem ter compreendido o $(p+1)$ como uma razão da Progressão Aritmética, que deverá ser formalizada pelo professor somente no final do jogo.

***Conclusão importante***

*Sequência decrescente vencedora*
$100$, $100-(p+1)$, $100-2(p+1)$, $100-3(p+1)$, ..., $100-(k-1)(p+1)$, $100-k(p+1)$, com $k(p+1) < 100$, onde $k$ indica quantos $(p+1)$ foram retirados de $100$.

Eis uma situação:

Se for escolhido $P=5$, então a sequência vencedora será:

$100$, $100-(5+1)$, $100-2(5+1)$, $100-3(5+1)$, $100-4(5+1)$, ..., $100-(k-1)(5+1)$, $100-k(5+1)$, onde $k(5+1) < 100$ e $k$ natural não nulo, ou seja, 100, 94, 88, 82, 76, 70, 64, 58, 52, 46, 40, 34, 28, 22, 16, 10, 4.

Por meio da sequência decrescente vencedora é possível utilizar o mesmo raciocínio na próxima rodada.

## Etapa 2 **Segunda rodada**

Inicialmente, peça aos alunos que apaguem as marcações feitas nas cartelas para reaproveitá-las e que realizem mais cinco partidas, com escolhas diferentes de $P$ entre $5$ e $15$, sendo $P$ o valor máximo de passos possíveis por jogada.

As cinco partidas disputadas têm como objetivo elucidar a sequência vencedora, como na etapa anterior, sem necessariamente chegar a uma conclusão geral para ela. Comparando as partidas já realizadas com os novos valores para $P$, esperamos que, ao final das partidas, as duplas elaborem uma estratégia geral, ou seja, uma sequência aritmética que vale para qualquer $P$ natural escolhido.

**Estratégia geral**

Para que as equipes alcancem a estratégia vencedora geral, basta seguir o mesmo raciocínio desenvolvido para $P=5$. Sendo:

***Conclusão importante***

$100, 100-(p+1), 100-2(p+1), 100-3(p+1), \ldots, 100-(k-1)(p+1)$, $100-k(p+1)$, com $k(p+1) < 100$, onde $k$ indica quantos $p+1$ foram retirados de $100$.

Ou seja:

Para $P=5$, temos:

$100, 100-(5+1), 100-2(5+1), \ldots, 100-(k-1)(5+1), 100-k(5+1)$, com $k(5+1) < 100$. Logo, $k < \frac{100}{6}$, onde $k$ indica quantos $(5+1)$ foram retirados de $100$.

Como $k$ é o maior número natural menor do que $\frac{100}{6}$, que juntamente com o termo $100$ resulta em um total de $(k+1)$ termos na sequência, então a sequência para $P=5$ terá $16+1=17$ termos.

Dessa forma, chegamos às sequências mostradas na tabela abaixo:

| $P$: nº de passos | $(k+1)$: nº de termos | Sequências vencedoras |
|---|---|---|
| 5 | 17 | 100 – 94 – 88 – 82 – 76 – 70 – 64 – 58 – 52 – 46 – 40 – 34 – 28 – 22 – 16 – 10 – 4 |
| 6 | 15 | 100 – 93 – 86 – 79 – 72 – 65 – 58 – 51 – 44 – 37 – 30 – 23 – 16 – 9 – 2 |
| 7 | 13 | 100 – 92 – 84 – 76 – 68 – 60 – 52 – 44 – 36 – 28 – 20 – 12 – 4 |
| 8 | 12 | 100 – 91 – 82 – 73 – 64 – 55 – 46 – 37 – 28 – 19 – 10 – 1 |
| **9** | **11** | **100 – 90 – 80 – 70 – 60 – 50 – 40 – 30 – 20 – 10 – 0** |
| 10 | 10 | 100 – 89 – 78 – 67 – 56 – 45 – 34 – 23 – 12 – 1 |
| 11 | 9 | 100 – 88 – 76 – 64 – 52 – 40 – 28 – 16 – 4 |
| 12 | 8 | 100 – 87 – 74 – 61 – 48 – 35 – 22 – 9 |
| 13 | 8 | 100 – 86 – 72 – 58 – 44 – 30 – 16 – 2 |
| 14 | 7 | 100 – 85 – 70 – 55 – 40 – 25 – 10 |
| 15 | 7 | 100 – 84 – 68 – 52 – 36 – 20 – 4 |
| $P$ | $100/(k+1)$ | $100$, $100-(P+1)$, $100-2(P+1)$, ..., $100-(k-1)(P+1)$, $100-k(P+1)$ |

**TABELA 1**

Analisemos a sequência para o valor $P = 9$. Quando se pensa em uma estratégia vencedora, deve-se perguntar: *faz diferença ser o jogador 1 ou o jogador 2?*

Os alunos que não escolheram $P = 9$ poderão concluir que será sempre o 1º jogador quem leva vantagem. Porém, se observarmos esta sequência, veremos que os dois últimos números são 10 e 0. O zero não pertence à cartela, assim, não é um número que pode ser marcado. O 10 não poderá ser marcado na primeira jogada, pois o passo máximo é 9. Assim, podemos concluir que o *jogador 2* leva vantagem nesse caso. Em todos os outros, é o *jogador 1* quem sai na frente.

Aproveite a oportunidade para questionar seus alunos quanto à certeza de suas afirmações sobre a questão final da Etapa 2. Essas afirmações serão importantes para o Fechamento do experimento.

Mostre que cada uma das sequências decrescentes apresentadas na tabela acima forma uma Progressão Aritmética com $(k+1)$ termos e razão $-(p+1)$.

# Fechamento

Relembre com seus alunos as regras do jogo e convide alguns deles para escrever na lousa as jogadas de suas partidas da Etapa 1. Identifique quais delas são iguais ou se aproximam da sequência vencedora. Questione os alunos sobre as características das jogadas que levaram à vitória.

Em seguida, com base na discussão, desenvolva o raciocínio que foi apresentado na Etapa 1 para $P = 8$. Peça aos alunos que descrevam a sequência:

100 – 91 – 82 – 73 – 64 – 55 – 46 – 37 – 28 – 19 – 10 – 1.

Pergunte quem leva vantagem na partida.

É importante notarem que, para um jogador ganhar a partida, ele deve marcar esta sequência de números, começando, se possível, do 1; ou seja, conhecendo a estratégia, o *jogador 1* tem vantagem.

Escolha alunos para apresentarem a sequência vencedora para os outros valores de $P$. Também estimule aqueles alunos que não obtiveram uma estratégia adequada durante as partidas para que construam a sequência a partir do raciocínio apresentado.

Depois de anotar na lousa a sequência de passos, pergunte-lhes se conseguem identificar alguma regularidade nas sequências. O objetivo é que percebam que os termos consecutivos distam um valor constante igual a $(P+1)$. Com isso, apresente o conceito de Progressão Aritmética (P.A.):

***Definição***

Uma *Progressão Aritmética (P.A.)* é uma sequência de números reais em que a *diferença entre um termo qualquer, a partir do segundo, e o termo antecedente é constante*. Essa diferença é denominada *razão* da P.A.

Frise que a estratégia vencedora para o jogo, de um modo geral, é uma P.A. crescente de razão $P+1$, cujo primeiro termo será o resto da divisão de 100 por $(P+1)$, ou seja, é importante mostrar que os alunos realizaram sucessivas retiradas de $(P+1)$ e, agora, por meio do algoritmo da divisão de números naturais, o primeiro temo da P.A. representa o resto.

Por exemplo, para $P = 11$, temos:

$$100-12-12-12-12-12-12-12-12=4 \Longleftrightarrow 100-8(11+1)=4$$

ou

$$\begin{array}{r|l} 100 & 12 \\ \cline{2-2} 4 & 8 \end{array}$$

Assim, a sequência será:
4 – 16 – 28 – 40 – 52 – 64 – 76 – 88 – 100.

Este pode ser um momento oportuno para apresentar o conceito de módulo e explicitar os termos importantes da P.A., a saber:

$a_1$: 1º termo,
$a_n$: último termo,
$n$: quantidade de termos,
$r$: razão.

No caso abordado: $a_1 = 4$, $a_n = 100$, $n = 9$ e $r = 12$.

A equação $a_n - (n-1) \cdot r = a_1$ que relaciona esses termos é conhecida como o termo geral de uma P.A. e é comumente apresentada dessa forma em livros didáticos.

Voltando à questão do algoritmo da divisão de números naturais para obtenção do 1º termo da sequência, defina a seguinte "operação" matemática:

***Definição***

Seja $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ e sejam $a, b \in \mathbb{N}$; diz-se que $a$ é congruente a $b$ módulo $m$, o que se escreve $a \equiv b \pmod{m}$, se $a$ e $b$ deixam o mesmo resto na divisão por $m$.

No jogo teremos $100 \bmod 12 = 4$, pois o resto da divisão de $100$ por $12$ é $4$ e $4 < 12$.

Mostre para os alunos que todos os elementos da sequência quando divididos pela razão resultam no mesmo resto, ou seja, temos

$$a_1 \bmod r = a_2 \bmod r = \ldots = a_n \bmod r.$$

Desse modo, o primeiro elemento $(a_1)$ das sequências, ou seja, o número de passos que o jogador deve dar em sua primeira jogada é igual a $100 \bmod (P+1)$, desde que $P$ seja diferente de $4$ ou $9$. No caso de $P = 4$ ou $P = 9$, a equipe deve saber a sequência para entrar nela o mais rápido possível, visto que nas cartelas não temos o número zero.

# Variações

Na atividade proposta, estabelecemos o limite de 100 casas no jogo, o que definiu o nome da atividade. No entanto, esse limite pode ser alterado para outros valores, dependendo do grupo com que se pretende desenvolvê-la. Sugerimos, no caso, que o número de passos seja readequado para o novo limite. Assim:

- Para um limite 50: "Corrida ao Cinquenta". O número de passos $p$ pode variar de 2 a 7.
- Para um limite 80: "Corrida ao Oitenta". O número de passos $p$ pode variar de 2 a 10.
- Para um limite 200: "Corrida ao Duzentos". O número de passos $p$ pode variar de 10 a 20.

Assim, concluímos que a atividade proposta poderia também ser generalizada para "Corrida ao $n$", ao invés de ser "Corrida ao 100", mantendo os mesmos objetivos.

# Bibliografia


CHEVALLARD, Yves. **Estudar matemáticas: o elo entre o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco, e KIYUKAMA, Rokusaburo. **Matemática – Ensino Médio volume 1**. São Paulo segunda edição 1999. Editora Saraiva.

# Ficha técnica

Matemática Multimídia

**Autores**
Carlos Roberto da Silva,
Lourival Pereira Martins e
Marcelo de Melo

**Revisores**
**Matemática**
Antônio Carlos Patrocínio
**Língua Portuguesa**
Carolina Bonturi
**Pedagogia**
Ângela Soligo

**Projeto gráfico**
Preface Design

UNICAMP

**Universidade Estadual de Campinas**
**Reitor**
Fernando Ferreira Costa
**Vice-Reitor**
Edgar Salvadori de Decca
**Pró-Reitor de Pós-Graduação**
Euclides de Mesquita Neto

**Matemática Multimídia**
**Coordenador Geral**
Samuel Rocha de Oliveira
**Coordenador de Experimentos**
Leonardo Barichello

**Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)**
**Diretor**
Jayme Vaz Jr.
**Vice-Diretor**
Edmundo Capelas de Oliveira

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL