Matemática Multimídia

NÚMEROS
E FUNÇÕES

O EXPERIMENTO

Experimento

Corrida ao 100

Objetivo da unidade
Apresentar de forma lúdica o conceito de Progressão Aritmética.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Corrida ao 100

Matemática Multimídia

O experimento

Sinopse
Esta atividade consiste em um jogo no qual os alunos deverão criar uma estratégia que os permita vencer as partidas. Para isso, eles serão induzidos a obter uma sequência de jogadas que, ao fim da atividade, será explorada como uma Progressão Aritmética.

Conteúdo
Sequências: Progressão Aritmética.

Objetivo
Apresentar de forma lúdica o conceito de Progressão Aritmética.

Duração
Uma aula simples.

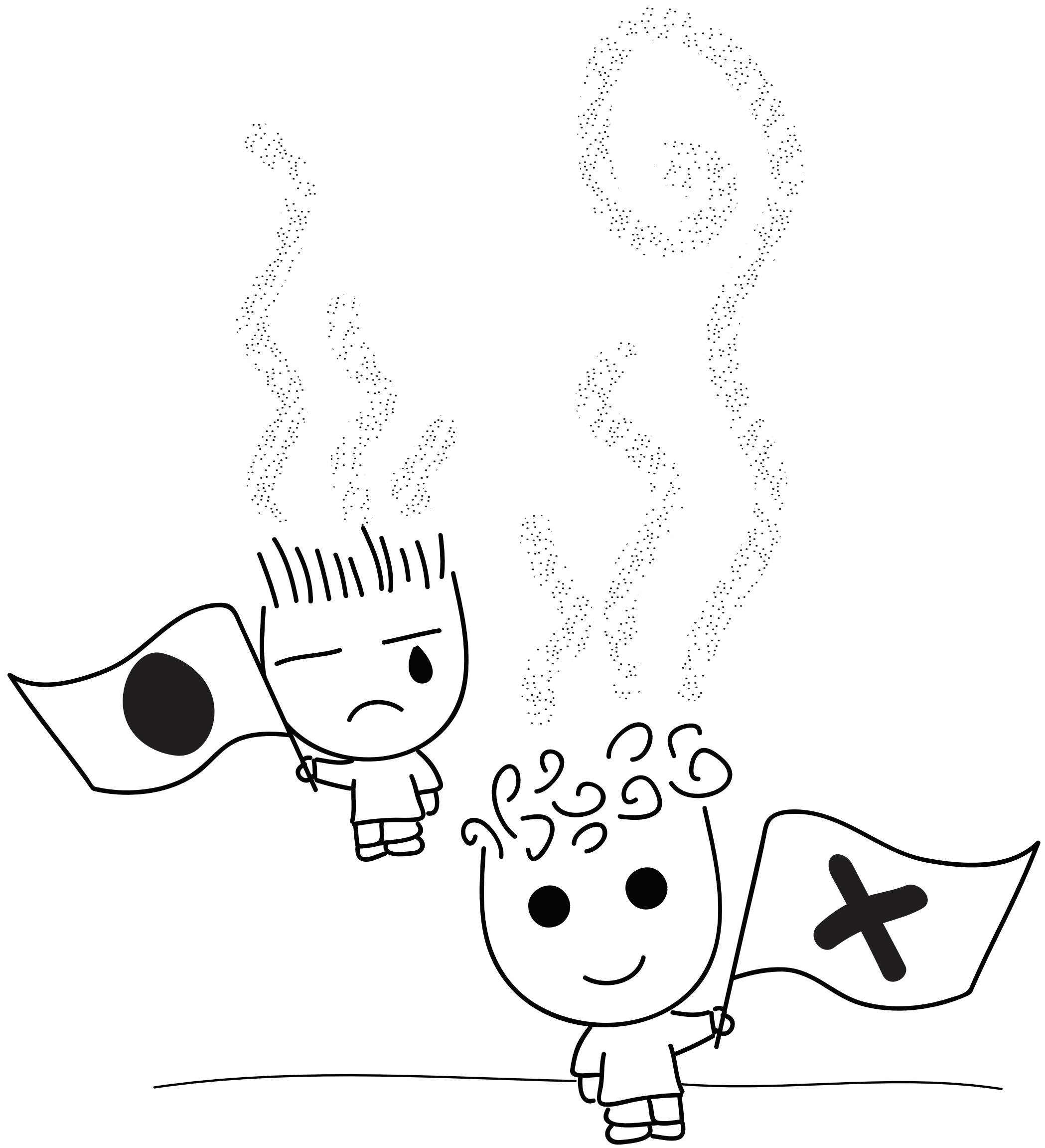
Introdução

É bastante comum observarmos durante nossas aulas alguns alunos que preferem, ao invés de executar uma atividade proposta, distrair-se disputando com algum colega jogos simples, mas muito envolventes. Este experimento busca explorar um desses jogos, analisando-o à luz da matemática.

O jogo, além de ser divertido, possui regras fáceis de ser compreendidas. Além disso, os materiais necessários para desenvolvê-lo (papel e lápis) estão disponíveis em qualquer sala de aula.

Observaremos que a estratégia vencedora para este jogo envolverá a identificação de uma Progressão Aritmética. Assim, faremos do lúdico uma oportunidade de introduzir conceitos matemáticos relacionados a estas sequências. Ao invés de definirmos P.A. para depois apresentarmos exemplos, nesta atividade os alunos construirão a sequência, identificarão suas características e, a partir disso, formalizarão os conceitos.

Este experimento também pode servir de modelo para a adaptação de outros jogos para atividades em sala de aula.



O Experimento

Material necessário

- Cartela numerada de 1 até 100 (*no anexo encontra-se um modelo de cartela, mas ela pode ser confeccionada pelos alunos*);
- Lápis;
- Borraca.

FIG. 1

O jogo

"Corrida ao 100" é para ser jogado por duas pessoas. Para isso, usaremos uma cartela com 100 casas, numeradas de 1 a 100, como mostra a FIGURA 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

FIG. 2

Regras do jogo

1. Tirar par ou ímpar para definir quem começará a primeira partida. Este será o jogador 1;
2. A cada jogada, escolher um número de casas entre 1 e P para percorrer, sendo P natural;
3. Aquele que for o jogador 1 colocará um círculo (○) nas casas por onde passar. Já o jogador 2, dando continuidade à sequência, deverá colocar um “xis” (×) em suas casas. Fazer as marcações de lápis;
4. Vence a partida o aluno que marcar a casa de número 100;
5. A cada partida, inverter quem faz o primeiro lance.

~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	~~10~~	11	12	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	~~17~~	~~18~~	~~19~~	20
21	22	23	24	25	26	27	~~28~~	29	30	31	32	33	34	~~35~~	~~36~~	~~37~~	38	39	40
41	42	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	48	49	50	51	52	~~53~~	~~54~~	~~55~~	56	57	58	59	60
~~61~~	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	66	67	68	69	70	71	~~72~~	~~73~~	74	75	76	77	78	79	80
81	~~82~~	83	84	85	86	~~87~~	~~88~~	~~89~~	~~90~~	~~91~~	92	93	94	95	96	97	98	99	~~100~~

FIG. 3

Preparação

Divida a turma em grupos de 4 alunos e entregue-lhes uma cópia da Folha do Aluno. Faça a leitura das regras e sane as dúvidas que possam surgir antes do início da atividade.

Os quatro alunos (A, B, C e D) devem se organizar em duas equipes (A, B) e (C, D); jogarão A×C e B×D. As equipes têm liberdade para discutir suas estratégias antes de começar uma rodada, porém, um jogador não deve interferir na partida do outro enquanto ela estiver sendo disputada.

Distribua duas Folhas Numeradas (Anexo) para cada grupo ou, se preferir, peça para que cada grupo as confeccione. Em cada uma delas, a dupla de adversários registrará as partidas disputadas.

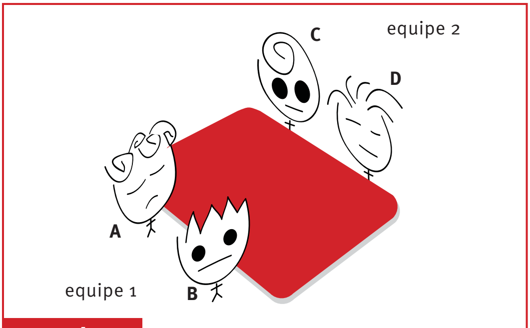


FIG. 4

! *Uma rodada é o conjunto de 5 partidas.*

Primeira rodada

ETAPA
1

Nesse primeiro conjunto de partidas, escolhemos $P = 8$. Assim, os alunos poderão marcar no máximo 8 casas por jogada, ou seja, poderão dar até *8 passos*.

Peça para que cada equipe discuta *qual é a melhor estratégia* para obter a vitória. Isso deve ser realizado antes que iniciem a rodada. Note que a folha entregue aos alunos possui 5 cartelas, uma para cada partida.

* *Só permita novamente a discussão sobre estratégias ao término das 5 partidas.*

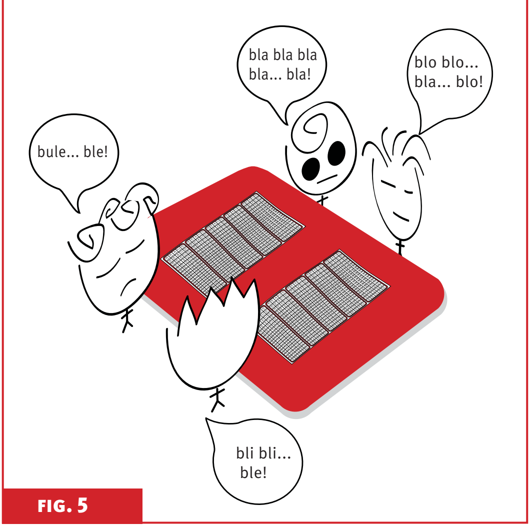


FIG. 5

Ao término da rodada, cada equipe ficará com uma das Folhas Numeradas para poder analisar e discutir a estratégia adotada pelos jogadores que venceram. Peça para que

as equipes anotem em uma folha de caderno as conclusões obtidas em suas análises.
Na Folha do Aluno, propomos a seguinte questão:

Questão para os alunos

Existe uma estratégia que permita ganhar sempre? Descreva-a em seu caderno.

A estratégia vencedora

Para alcançar a estratégia vencedora, acompanhe o seguinte raciocínio:

- Dado que posso marcar até 8 casas por jogada, para ter certeza da vitória, antes de marcar a casa 100, devo ter marcado a casa 91. Fazendo isso, meu adversário poderá marcar somente as casas de 92 a 99.
- Dessa forma, 9 casas deverão ser marcadas após eu marcar a 91. Qualquer que seja a jogada do meu adversário, eu consigo complementá-la de modo que a soma das nossas jogadas totalize 9 passos.

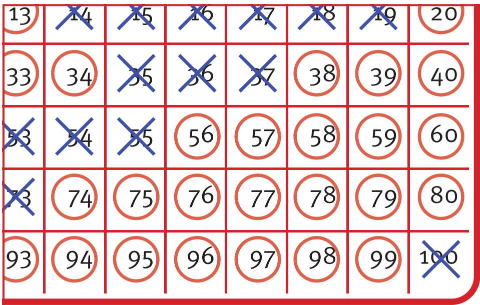


FIG. 6

* *Durante a atividade, identifique os alunos que não conseguiram obter uma estratégia adequada. No Fechamento, ajude-os a obtê-la.*

- Porém, para ter certeza de que marcarei a casa 91, devo ter marcado a casa 82. Fazendo isso, meu adversário poderá marcar apenas as casas de 83 a 90. Novamente, devo completar o número de passos do meu adversário de modo que os passos dele somados aos meus totalizem 9 passos.
- Continuando este raciocínio até o início da minha cartela, terei a seguinte sequência vencedora:
  1 – 10 – 19 – 28 – 37 – 46 – 55 – 64 – 73 – 82 – 91 – 100
- Dessa forma, para conquistar a casa de número 100, deverei conquistar um dos elementos dessa sequência, mantendo-a até o fim. Concluo daí que, se eu for o *jogador 1*, terei vantagem, já que o primeiro número a ser escolhido é menor que P e maior que zero!

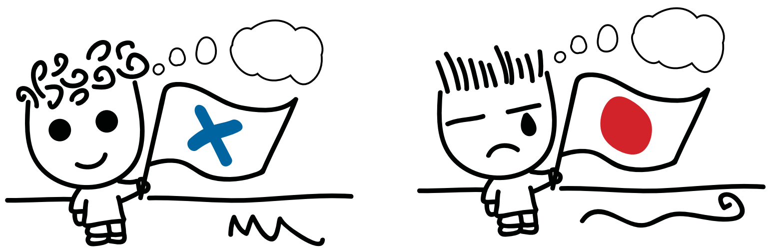


FIG. 7

Deixe que os alunos discutam por aproximadamente 5 minutos os resultados da Etapa 1. Não lhes apresente ainda o raciocínio exposto anteriormente, mas apenas questões que os ajudem a nortear a análise da rodada.

Enfatize a necessidade de os alunos registrarem suas conclusões no caderno, pois, *para a próxima rodada, as partidas serão apagadas da Folha Numerada*.

Segunda rodada

ETAPA 2

Nesta etapa, faremos uma alteração na regra do jogo. Os alunos disputarão mais 1 rodada (5 partidas), desta vez usando um valor de P diferente de 8. Para isso, cada par de adversários deverá escolher um número entre 5 e 15 para usar como número máximo de passos.

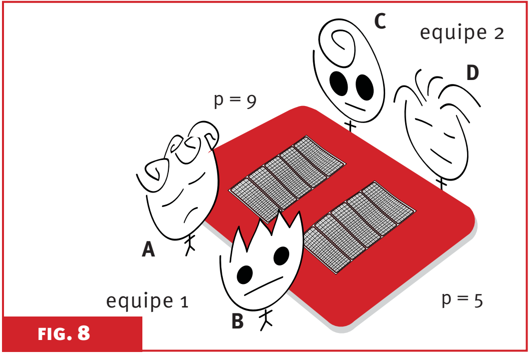


FIG. 8

É possível que algumas equipes tenham percebido a sequência vencedora na etapa

* *A escolha do intervalo* $5 \leqslant P \leqslant 15$ *foi motivada para não produzir partidas muito longas nem muito curtas. Ignorando-se esta condição, outros valores para* P *podem ser tranquilamente escolhidos.*

anterior sem entender o raciocínio que a gerou. Assim, com novos valores para P, a hipótese que levantaram anteriormente será testada. Esperamos que os alunos sejam desafiados a elaborar uma estratégia geral, que valha para qualquer P escolhido.

Com isso, solicite aos alunos que após a segunda rodada revisem e esclareçam suas estratégias tendo em vista vencer sempre.

Estratégia geral

Para que as equipes encontrem a estratégia vencedora geral, basta seguirem o mesmo raciocínio desenvolvido para $P = 8$. Com isso, atingimos as sequências vencedoras, mostradas na TABELA 1.

Nº de passos	**Sequências vencedoras**
$P = 5$	4 – 10 – 16 – 22 – 28 – 34 – 40 – 46 – 52 – 58 – 64 – 70 – 76 – 82 – 88 – 94 – 100
$P = 6$	2 – 9 – 16 – 23 – 30 – 37 – 44 – 51 – 58 – 65 – 72 – 79 – 86 – 93 – 100
$P = 7$	4 – 12 – 20 – 28 – 36 – 44 – 52 – 60 – 68 – 76 – 84 – 92 – 100
$P = 9$	0 – 10 – 20 – 30 – 40 – 50 – 60 – 70 – 80 – 90 – 100
$P = 10$	1 – 12 – 23 – 34 – 45 – 56 – 67 – 78 – 89 – 100
$P = 11$	4 – 16 – 28 – 40 – 52 – 64 – 76 – 88 – 100
$P = 12$	9 – 22 – 35 – 48 – 61 – 74 – 87 – 100
$P = 13$	2 – 16 – 30 – 44 – 58 – 72 – 86 – 100
$P = 14$	10 – 25 – 40 – 55 – 70 – 85 – 100
$P = 15$	4 – 20 – 36 – 52 – 68 – 84 – 100

TABELA 1

O raciocínio usado na ETAPA 1, generalizado, nos leva a obter os elementos da sequência tomando $100 - n(P + 1)$ como último termo, onde n é o maior número natural menor ou igual a $100/(P+1)$.

Analisemos a sequência para o valor de $P = 9$. Quando pensamos em uma estratégia vencedora, devemos perguntar: faz diferença ser o jogador 1 ou o jogador 2? Os alunos que não escolherem $P = 9$ poderão concluir que será sempre o 1º jogador aquele que leva vantagem. Porém, se observarmos esta sequência, veremos que os dois primeiros números são 0 e 10. O zero não pertence à cartela, assim, não é um número que pode ser marcado. Já o 10 não pode ser marcado na primeira jogada, pois o passo máximo é 9. Assim, podemos concluir que o jogador 2 leva vantagem nesse caso. Em todos os outros, é o jogador 1 quem sai na frente.

Aproveite a oportunidade para questionar seus alunos quanto à certeza de suas afirmações sobre a questão final da ETAPA 2.

! *Note que esta sequência perde sentido quando resulta em números negativos, já que nossa cartela começa no 1.*

! *No FECHAMENTO exploramos outros valores para P em que o jogador 2 tem vantagem.*

Fechamento

Relembre com seus alunos as regras do jogo e convide alguns deles para colocar na lousa as jogadas de suas partidas da Etapa 1. Identifique as partidas em que um dos jogadores seguiu a sequência vencedora ou parte dela. Questione os alunos sobre as características das jogadas que levaram à vitória.

Em seguida, com base na discussão, desenvolva o raciocínio que foi apresentado na Etapa 1 para $P = 8$. Peça aos alunos que identifiquem a sequência 1 – 10 – 19 – 28 – 37 – 46 – 55 – 64 – 73 – 82 – 91 – 100.

Pergunte aos alunos quem leva vantagem na partida. É importante notarem que, para um jogador vencer, deve marcar esta sequência de números, começando, se possível, do 1. Desta forma, conhecendo a estratégia, o *jogador 1* terá vantagem.

Escolha alunos para apresentar a sequência vencedora para os outros valores de P. Também questione aqueles alunos que não obtiveram uma estratégia adequada durante as partidas e os oriente a construir uma sequência a partir do raciocínio apresentado.

Depois de anotar na lousa a sequência de passos, pergunte-lhes se podem identificar alguma regularidade nas sequências. O objetivo é que percebam que os termos consecutivos que devem ser marcados distam valores constantes dados por $(P+1)$. Com isso, apresente o conceito de *Progressão Aritmética (PA):*

Definição

Uma *Progressão Aritmética (P.A.)* é uma sequência de números reais em que a *diferença entre um termo qualquer (a partir do 2º) e o termo precedente é sempre a mesma, constante*. Essa diferença é chamada de *razão* da P.A. e é representada por r.

Frise que a estratégia vencedora para o jogo é uma P.A. de razão $P+1$. Por exemplo, para $P=8$ temos uma P.A. de razão 9, cujos termos são identificados como na TABELA 2:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100

TABELA 2

A partir dessa terminologia, podemos explorar melhor aquilo que chamamos de a_1. Observe que podemos obter esse termo diretamente, sabendo apenas o valor da razão. Para isso, apresentamos o seguinte:

Definição

Seja $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ e sejam $a, b \in \mathbb{N}$; diz-se que "a é congruente a b módulo m", o que se escreve $a \equiv b \pmod{m}$, se a e b deixam o mesmo resto na divisão por m.

Logo que acabar a discussão, mostre para os alunos que todos os elementos da sequência quando divididos pela razão resultam no mesmo resto, ou seja, temos $a_1 \bmod r = a_2 \bmod r = \ldots = a_n \bmod r$. Deste modo, o primeiro elemento da sequência (a_1), ou seja, o número de passos que o jogador deve dar em sua primeira jogada é igual a $100 \bmod (P+1)$, desde que P seja diferente de 4, 9, 19 etc. No geral, temos que se $100 \bmod (P+1)$ é igual a zero, ou seja, $P+1$ é divisor de 100, o *jogador 2* tem vantagem. Caso contrário, o *jogador 1* ganha.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autores
Carlos Roberto da Silva,
Lourival Pereira Martins e
Marcelo de Melo

Coordenação de redação
Fabricio de Paula Silva

Redação
Thaisa Aluani

Revisores
Matemática
Antônio Carlos Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara de Oliveira

Fotógrafo
Augusto Fidalgo Yamamoto

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL