



Matemática Multimídia

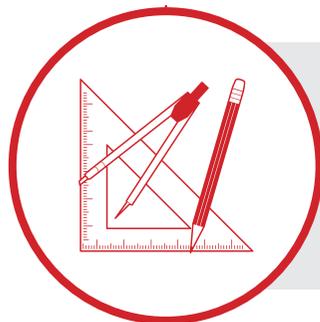
ANÁLISE DE DADOS  
E PROBABILIDADE



GEOMETRIA  
E MEDIDAS



## O EXPERIMENTO



# Experimento

Com quantas cores posso pintar um mapa?

### Objetivos da unidade

1. Apresentar o Teorema das Quatro Cores;
2. Introduzir questões de Topologia;
3. Capacitar o aluno a tomar decisões de acordo com determinadas restrições.



UNICAMP

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons



FUNDO NACIONAL  
DE DESENVOLVIMENTO  
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de  
Educação a Distância

Ministério da  
Ciência e Tecnologia

Ministério  
da Educação



# Com quantas cores posso pintar um mapa?

## O EXPERIMENTO

### Sinopse

Neste experimento, abordaremos o Teorema das Quatro Cores. Os alunos serão convidados a pensar sobre como colorir diversos mapas utilizando apenas quatro cores. Posteriormente, trocaremos os mapas por curvas fechadas, e proporemos aos alunos pintá-las também com o mínimo de cores possível. No FECHAMENTO, apresentamos a demonstração do caso das curvas fechadas e sugerimos alguns jogos e um desafio.

### Conteúdo

Geometria, Topologia.

### Objetivos

1. Apresentar o Teorema das Quatro Cores;
2. Introduzir questões de Topologia;
3. Capacitar o aluno a tomar decisões de acordo com determinadas restrições.

### Duração

Uma aula dupla.

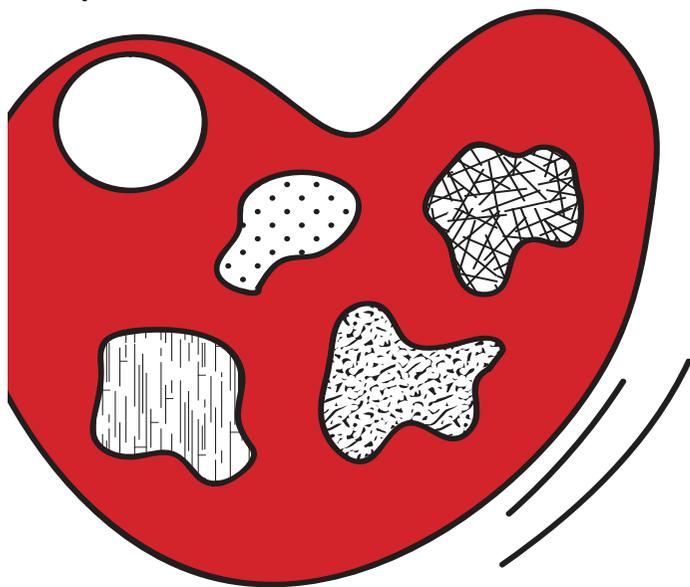


# Introdução

---

Um dos encantos da matemática é o modo como certos problemas que parecem simples podem desconcertar os melhores cérebros do mundo durante séculos. Alguns exemplos disso são: o último Teorema de Fermat, o problema de Kepler e o Teorema das Quatro Cores.

O Teorema das Quatro Cores chamou a atenção de muitos matemáticos durante anos. Ele foi conjecturado em 1852 por Francis Guthrie, um estudante de pós-graduação da University College London. Guthrie propunha que qualquer mapa poderia ser pintado com quatro cores ou menos, sem que houvesse áreas adjacentes com a mesma coloração.



Este problema passou por várias mãos até ser finalmente provado por Kenneth Appel e Wolfgang, da Universidade de Illinois, em 1976. Mais de um século após ter sido conjecturado!

Neste experimento serão mostrados diversos tipos de mapa e as estratégias para colori-los, sem ultrapassar quatro cores. As demonstrações apresentadas demandam o uso de computadores, gerando algumas controvérsias. Assim, podemos dizer que até o presente momento não há uma demonstração do teorema que possa ser completamente lida e publicada, estando ainda sujeita a algum matemático se aventurar.

E você? Será que consegue pintar qualquer mapa com apenas 4 cores?

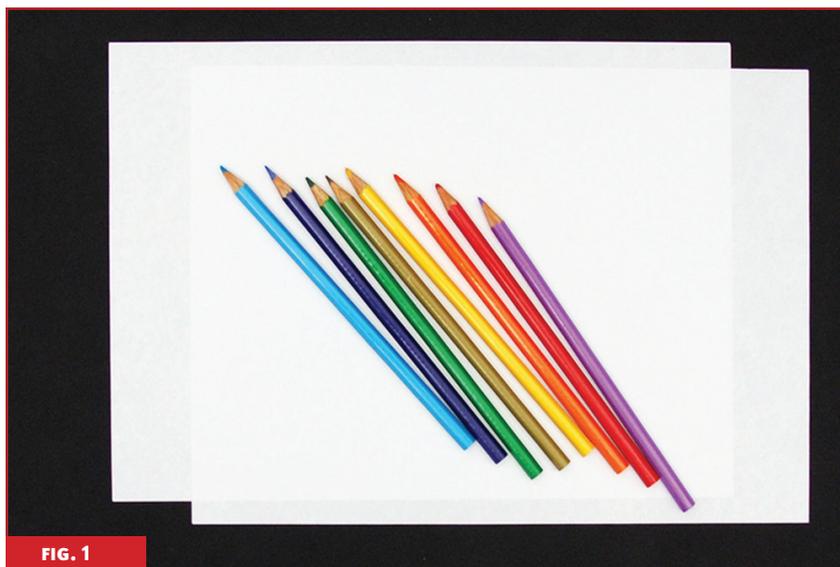
# O Experimento

---

## Material necessário

---

- Lápis de cor;
- Folhas de sulfite (ou *folhas de caderno*).



---

## Comentários iniciais

---

O Teorema das Quatro Cores afirma que todo mapa pode ser colorido com quatro ou menos cores, respeitando-se a condição de que países vizinhos, isto é, com alguma linha de fronteira em comum, tenham cores diferentes.

---

## Preparação

---

Divida a sala em duplas e entregue uma FOLHA DO ALUNO. Como sugestão, pode ser pedido para os alunos uma pesquisa prévia. Olhando em algum atlas, eles poderão verificar com quantas cores diferentes os mapas estão pintados.

## O problema das quatro cores

ETAPA

1

Professor, inicie o experimento com o mapa abaixo:



FIG. 2

Peça aos alunos que pintem o mapa usando o menor número de lápis de cor possível, respeitando-se a condição de que países vizinhos, isto é, com alguma linha de fronteira em comum, tenham cores diferentes.

Inicie uma discussão a respeito da quantidade mínima de cores que cada dupla conseguiu.

### **Questão para os alunos**

Qual é o menor número de cores que podemos utilizar para colorir um mapa, de forma que as regiões com fronteiras em comum tenham cores diferentes?

Após a discussão, os alunos terão uma opinião da quantidade mínima de cores necessária para pintar um mapa. A partir daí, inicie as próximas atividades da FOLHA DO ALUNO.

### **Questão para os alunos**

Quantas cores são suficientes para pintar os mapas a seguir, de forma que as regiões com fronteiras em comum tenham cores diferentes?

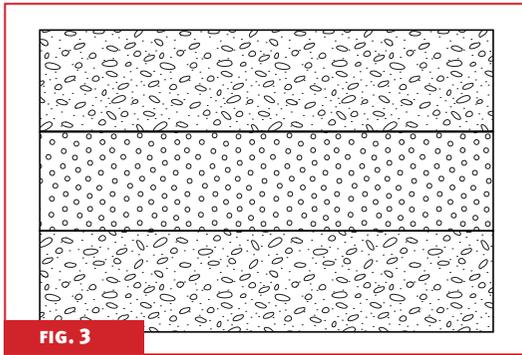


FIG. 3

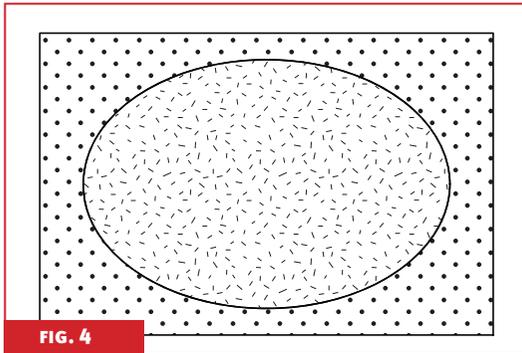


FIG. 4

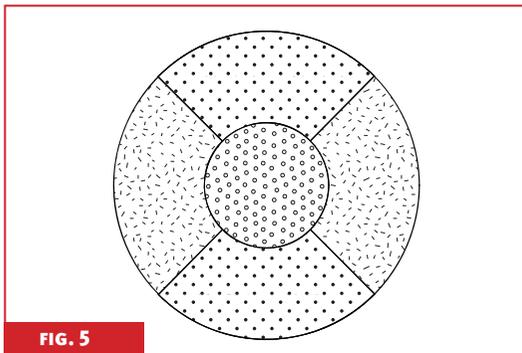


FIG. 5

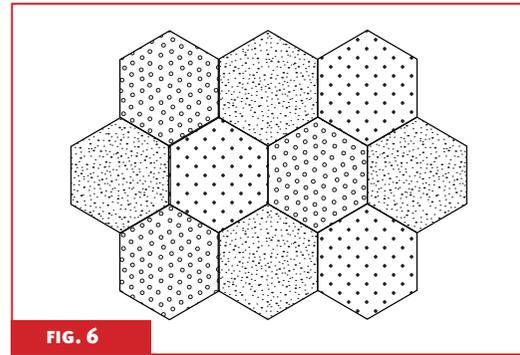


FIG. 6

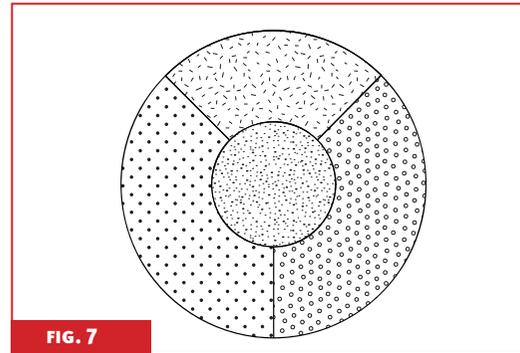


FIG. 7

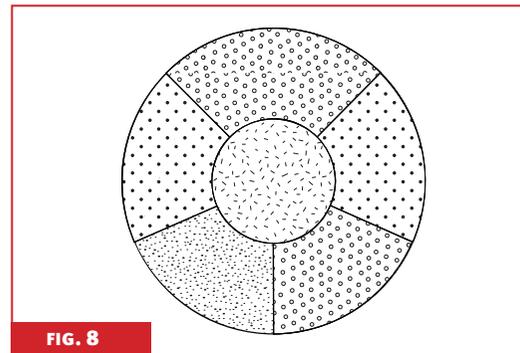


FIG. 8

Segundo o Teorema das Quatro Cores, qualquer mapa é possível de ser colorido com apenas quatro cores (ou menos), sem que as regiões com fronteiras em comum tenham a mesma coloração.

Apesar de ser notório que quatro cores bastam, nem sempre é tão simples encontrar uma maneira de colorir um mapa com apenas quatro cores. Como sugestão, incentive a classe a tentar colorir com quatro cores as figuras dadas.

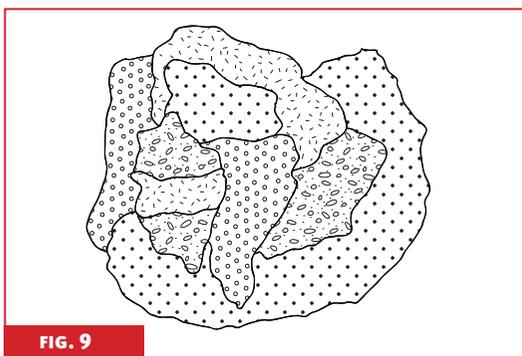


FIG. 9

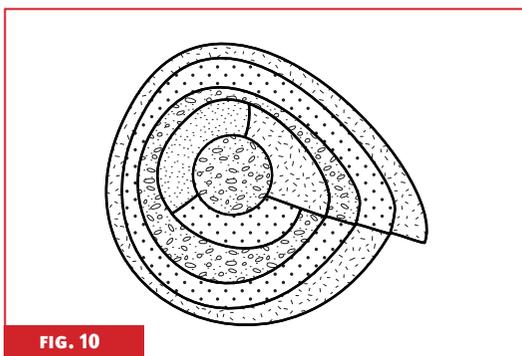


FIG. 10

## Curvas fechadas

ETAPA  
2

Professor, peça aos alunos para desenhar sem tirar o lápis do papel uma curva qualquer que termine no mesmo ponto onde começou. Os traços podem se cruzar, mas não se coincidir. A seguir, seguem alguns exemplos de curvas:

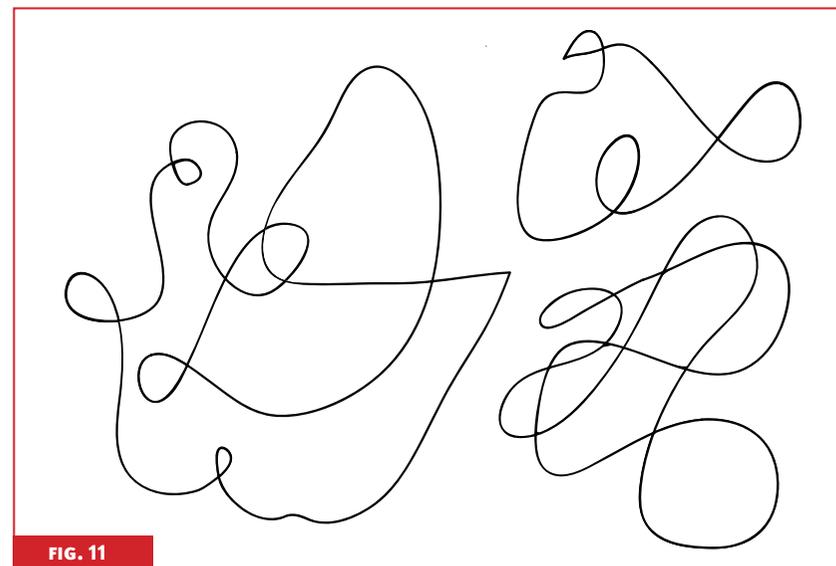


FIG. 11

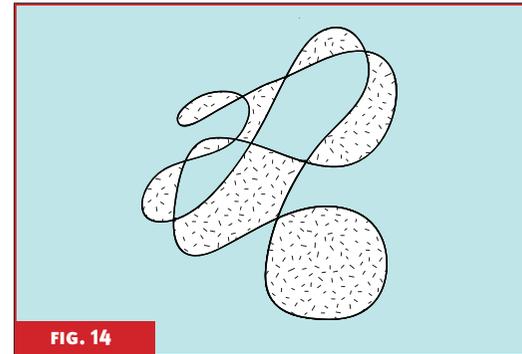
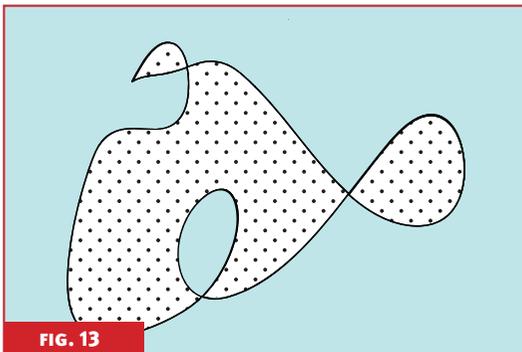
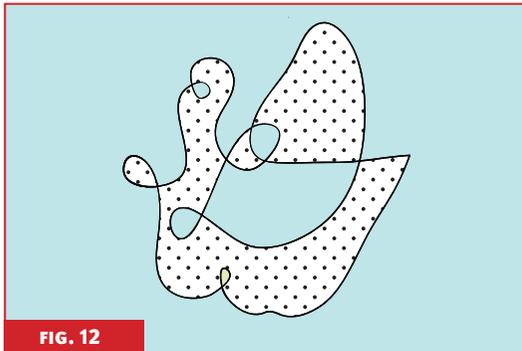
Para esse tipo de curva vamos considerar o lado de fora, o que não foi feito na Etapa anterior para simplificar.

### Questão para o aluno

Qual é o mínimo de cores necessário para colorir as regiões limitadas por esse tipo de curva, respeitando a condição de que regiões com fronteiras em comum tenham cores diferentes?

Os alunos devem, então, colorir as regiões formadas pela curva que fizeram. Questione-os acerca da quantidade mínima que cada um obteve.

Esse tipo de curva sempre pode ser colorida com apenas duas cores.



Caso algum aluno não tenha conseguido pintar com duas cores, peça que tente novamente. Uma sugestão de atividade neste momento seria cada aluno desenhar uma nova curva, trocar com seu parceiro de dupla e colorir.

## Fechamento

Para o FECHAMENTO, propomos uma verificação para a ETAPA 2, alguns jogos e um desafio, que poderão ser realizados pelos alunos no final do experimento se assim desejar.

### Algoritmo

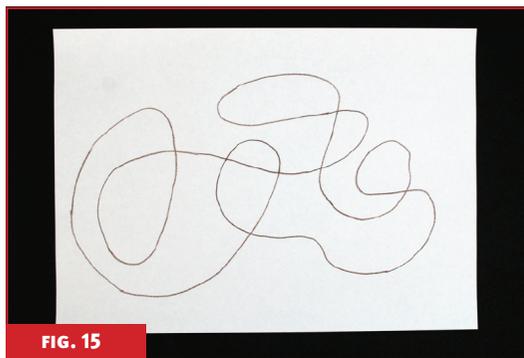
Na ETAPA 2, concluímos que qualquer curva fechada, desenhada sem tirar o lápis do papel, pode ser pintada com apenas duas cores. Mas isso pode não ser tão simples

com uma curva bem complexa. Então, o que é possível fazer para colorir uma curva fechada com duas cores e sem errar?

Pretendemos apresentar um algoritmo para que qualquer curva fechada, por mais complexa que seja, possa ser pintada facilmente com duas cores.

Como este método é sempre válido, podemos afirmar que é uma demonstração de que qualquer curva fechada desenhada sem tirar o lápis do papel pode ser colorida com apenas duas cores.

- Primeiramente, peça aos alunos que desenhem uma nova curva como desejarem;



- Definimos como região qualquer parte da figura delimitada por alguma fronteira, no caso, delimitada pelos traços feitos. Consideramos a parte de fora também como uma região;
- A partir daí, escolha um ponto em alguma região e trace uma semirreta a partir desse ponto até a parte mais externa;

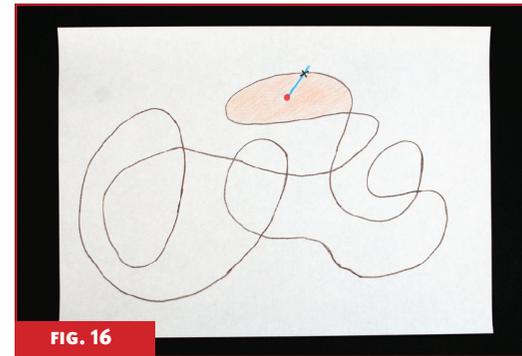


FIG. 16

### ***Restrições para a construção da semirreta***

- não deve tangenciar nenhuma parte da curva;
- não deve cruzar um nó da curva.

Sempre será possível seguir essas restrições, pois há na curva um número finito de intersecções e um número infinito de direções que poderão ser escolhidas para a construção da semirreta.

- Agora, siga pela semirreta, a partir do ponto, e conte quantas fronteiras ela cruza. Se o valor obtido for um número ímpar, pinte a região; se for um número par, não pinte (também pode ser escolhida uma cor para cada paridade);

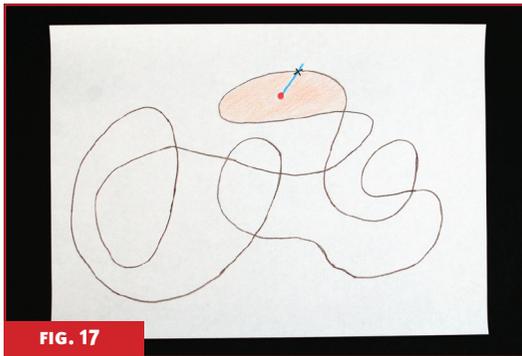


FIG. 17

- Faça o mesmo para a outra região;

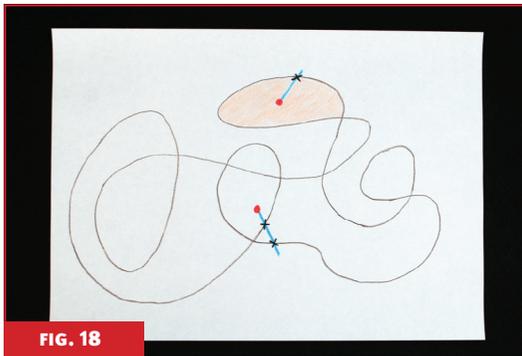


FIG. 18

- E, daí, para todas as regiões.

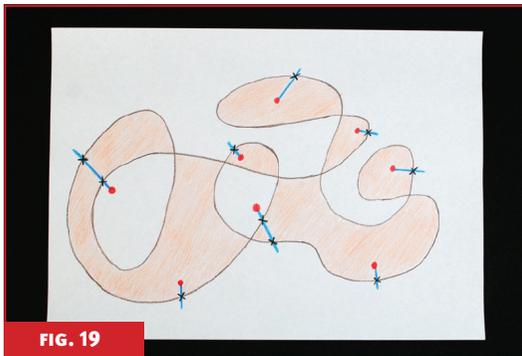


FIG. 19

É aconselhável escolher a direção que cruza menos vezes a curva, pois isso não modifica a paridade da quantidade de cruzamento com a semirreta. Por exemplo:

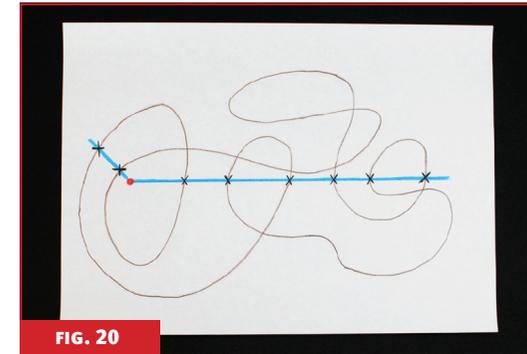


FIG. 20

O número de cruzamentos que ocorrem na semirreta menor é 2 e, para a semirreta maior, é 6. Ou seja, ambas semirretas encontram a mesma paridade, o que indica a mesma coloração da região.

### Jogos\Desafio

Após o experimento, sugira alguns jogos ou o desafio abaixo.

#### Jogo 1

Neste jogo será utilizado um mapa para colorir, que pode ser feito pelos próprios alunos.

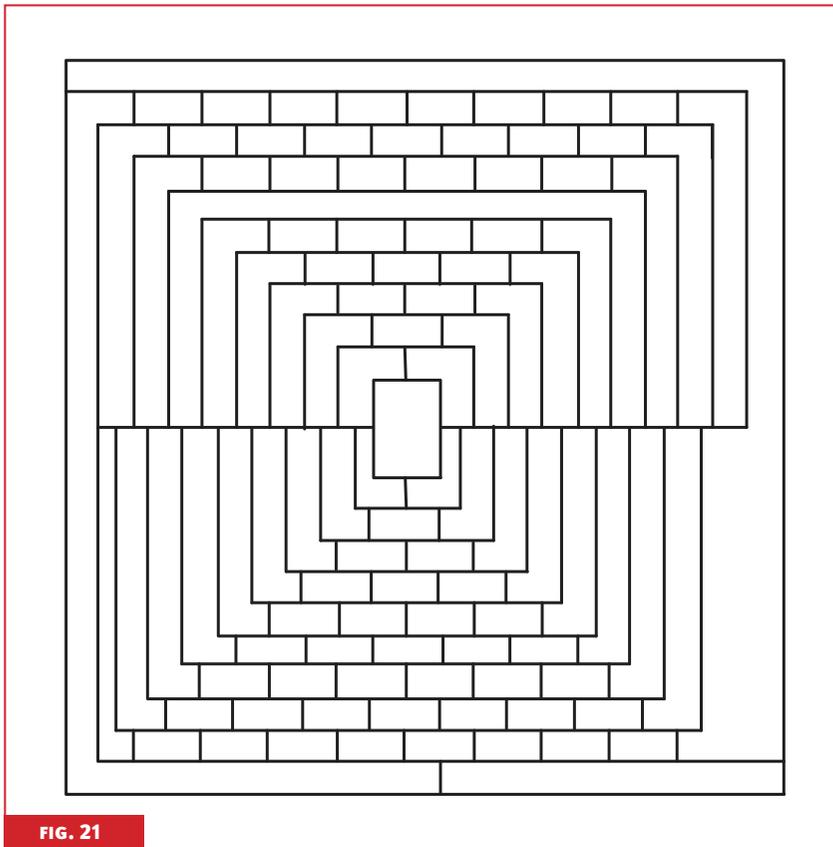
Dois jogadores têm quatro lápis de cores diferentes e um mapa não colorido. Cada um dos jogadores pinta sucessivamente uma região do mapa. Perde o primeiro que não conseguir colorir adequadamente nenhuma região ainda sem cor.

### *Jogo 2*

Dois jogadores têm quatro lápis de cores diferentes e uma folha de papel em branco. Um jogador desenha um país. O outro jogador o colore com uma cor e desenha outro país que faça fronteira com o anterior, e assim sucessivamente. Perde o primeiro que não conseguir colorir adequadamente o país proposto.

### *Desafio*

Pinte o mapa abaixo com apenas quatro cores.



# Ficha técnica

## AUTOR

Cristiano Torezzan

## COORDENAÇÃO DE REDAÇÃO

Rita Santos Guimarães

## REDAÇÃO

Mariana Sacrini Ayres Ferraz

## REVISORES

### Matemática

Antônio Carlos Patrocínio

### Língua Portuguesa

Carolina Bonturi

### Pedagogia

Ângela Soligo

## PROJETO GRÁFICO

Preface Design

## ILUSTRADOR

Lucas Ogasawara de Oliveira

## FOTÓGRAFO

Augusto Fidalgo Yamamoto



## UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

### Reitor

Fernando Ferreira Costa

### Vice-Reitor

Edgar Salvadori de Decca

### Pró-Reitor de Pós-Graduação

Euclides de Mesquita Neto

## MATEMÁTICA MULTIMÍDIA

### Coordenador Geral

Samuel Rocha de Oliveira

### Coordenador de Experimentos

Leonardo Barichello

## INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA (IMECC – UNICAMP)

### Diretor

Jayme Vaz Jr.

### Vice-Diretor

Edmundo Capelas de Oliveira

LICENÇA Esta obra está licenciada sob uma licença Creative Commons 