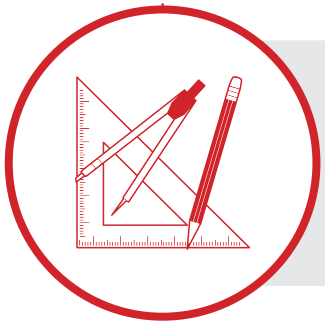
Matemática Multimídia

GEOMETRIA
E MEDIDAS

Guia do professor



Experimento

Padrões no plano

Objetivos da unidade

1. Obter padrões geométricos em uma malha quadriculada a partir de regras algébricas;
2. Familiarizar o aluno com o conceito de vetores no plano.

UNICAMP

FUNDO NACIONAL
DE DESENVOLVIMENTO
DA EDUCAÇÃO

Secretaria de
Educação a Distância

Ministério da
Ciência e Tecnologia

Ministério
da Educação

UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Padrões no plano

Guia do professor

Sinopse

Trabalhando em grupo, os alunos deverão construir figuras em papel quadriculado a partir de sequências de comandos. Caberá ao professor relacionar as figuras com as construções vetoriais, cujas propriedades e definição podem ser explicadas matematicamente.

Conteúdos

Geometria Analítica: Rotações, Translações e Vetores.

Objetivos

1. Obter padrões geométricos em uma malha quadriculada a partir de regras algébricas;
2. Familiarizar o aluno com o conceito de vetores no plano.

Duração

Duas aulas.

Matemática Multimídia

Introdução

Neste experimento os alunos são instruídos a fazer algumas transformações no plano: as translações e rotações. Para isso usamos o papel quadriculado, por simplicidade, de forma que as translações aconteçam ao longo dos riscos, em números inteiros de deslocamento; e as rotações de 90°, em sentido horário. Os desenhos formados pelo trajeto são simples, mas bonitos, e ainda assim fornecem desafios de concentração e oportunidades de explorar conceitos de vetores e de divisibilidade.

Um dos grandes matemáticos do século XX, G. Hardy, referiu-se a um matemático da seguinte forma:

> Um matemático, como um escritor ou um poeta, é um criador de padrões. Se os padrões do primeiro são mais permanentes do que os do segundo, é porque são feitos de ideias.

Esta atividade mostra, de maneira simples, como fazer alguns padrões no plano quadriculado.

Motivação

O experimento tem um apelo lúdico logo no início: permite que os alunos façam hipóteses sobre o que vai acontecer e verifiquem suas hipóteses. A cada desenho que surge, novas hipóteses podem ser feitas e testadas e, como subproduto, os padrões obtidos no plano têm apelo artístico com representações históricas.

Veja a FIGURA 1 a seguir, em que o padrão da sequência de passos (1, 2, 3), com as rotações de 90° em sentido horário a cada translado, aparece após algumas repetições. As figuras podem ser coloridas, com cores à escolha dos participantes.

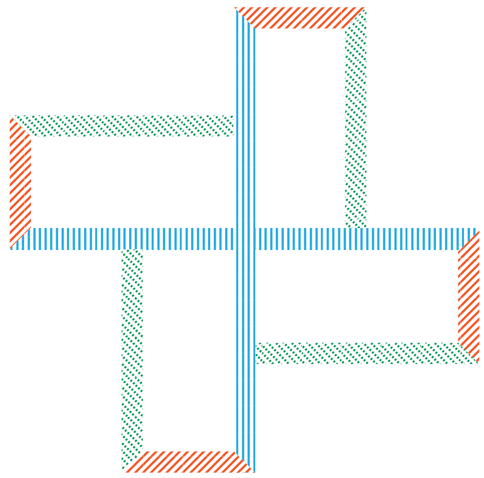


FIG. 1 *Padrão da sequência (1, 2, 3)*

O experimento

Comentários iniciais

É importante chamar a atenção dos alunos para que sigam com cuidado os comandos, que não são difíceis, mas exigem concentração nas rotações. Alguns alunos preferem imaginar o trajeto feito por uma formiga imaginária que deve virar à direita ao final de cada translação, outros alunos preferem a visualização da rotação como a dos ponteiros de um relógio, no sentido horário.

Para construir as figuras serão dadas sequências de comandos, representados por números naturais. Cada número representa a quantidade de quadradinhos que deverá ser percorrida no papel quadriculado ao longo do tracejado, isto é, uma translação. Entre uma translação e outra, devemos efetuar uma rotação de 90° em sentido horário. Deste modo, serão quatro os sentidos para o deslocamento: direita (⇢), esquerda (⇠), para baixo (⇣) e para cima (⇡).

Para iniciar a construção da figura, devemos partir de um dos vértices dos quadrados do papel quadriculado e executar os comandos. Quando terminamos a sequência de translações, devemos repeti-la do ponto onde estivermos, até que ela recomece do ponto inicial e os traços, se continuasse o procedimento, se sobreporiam aos traços já desenhados. Ou então paramos ao perceber que os traços nunca seriam sobrepostos e a figura se estenderia indefinidamente.

O exemplo mais simples possível é a repetição da translação de uma unidade seguida da rotação de 90°, denotado simplesmente por (1). O parêntese é para indicar que o procedimento deve ser repetido. A figura resultante é um quadradinho de lado 1 no papel quadriculado.

As figuras apresentadas a seguir foram produzidas usando o software gratuito SuperLogo 3.0.

Etapa 1 **Desenhos propostos**

As sequências propostas nesta etapa do experimento são: (3, 4), que é um retângulo de lados 3 e 4, e as demais sequências são as seguintes:

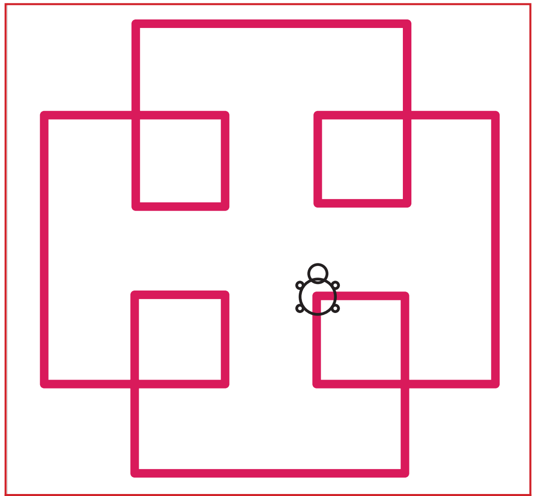


FIG. 2 *Padrão da sequência (1, 2, 3, 2, 1)*

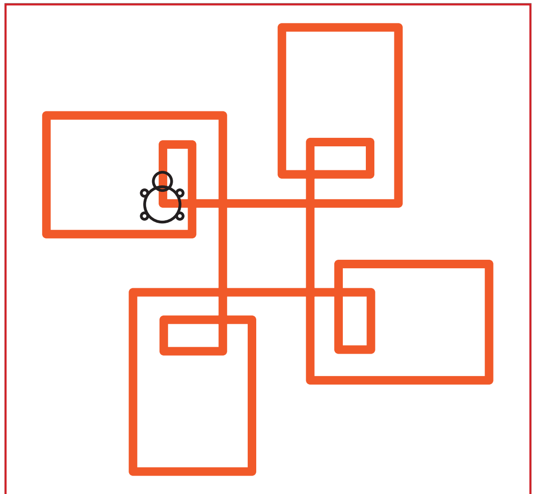


FIG. 3 *Padrão da sequência (2, 1, 3, 5, 4, 6, 8)*

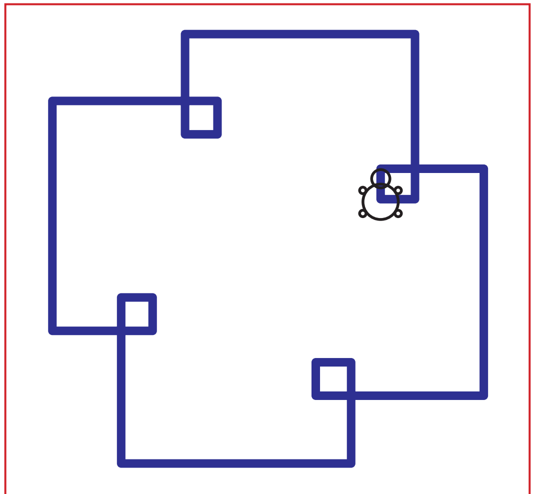


FIG. 4 *Padrão da sequência (1, 3, 5, 7, 1)*

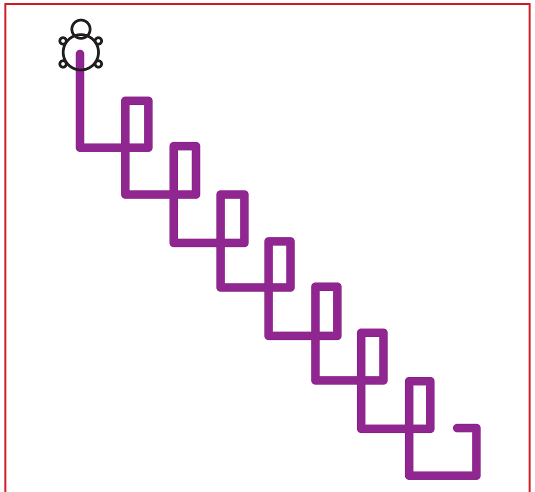


FIG. 5 *Padrão da sequência (1, 2, 3, 4) que não fecha.*

Etapa 2 **Desenhos propostos**

Nesta etapa os alunos devem ser estimulados a inventar uma sequência e fazer o respectivo desenho. Por exemplo, a sequência de ímpares e pares (1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8) gera a seguinte figura:

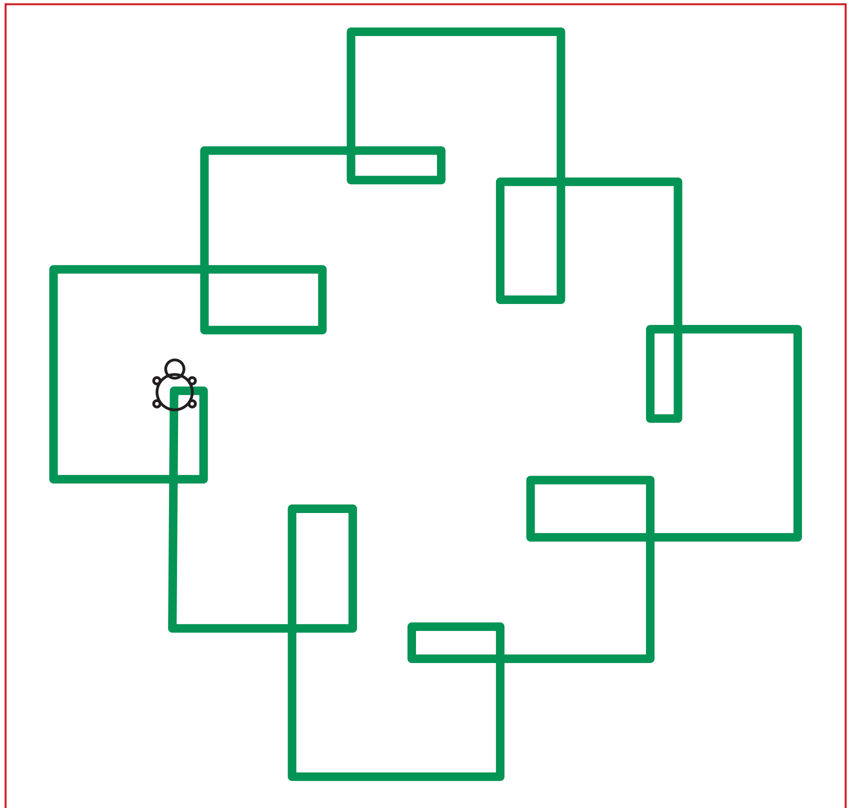


FIG. 6 *Padrão da sequência (1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8)*

Questão para os alunos

Por que algumas figuras se fecham e outras não?

Observe com os alunos que, após:

- quatro rotações de 90°, recuperamos o sentido inicial;
- duas rotações de 90°, estaremos no sentido oposto ao inicial.

Assim, para a figura se fechar, devemos garantir que o sentido inicial seja recuperado e que os deslocamentos em cada um dos quatro sentidos (cima, baixo, direita e esquerda) se anulem.

Para não confundir os alunos, vamos nos restringir às translações positivas e não nulas.

Por exemplo, a sequência $(1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8)$ que após quatro repetições gera a FIGURA 6 tem os seguintes deslocamentos:

- para a direita: $1, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$;
- para a esquerda: $5, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 7, 6$;
- para cima: $7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 9, 8$;
- para baixo: $3, 2, 1, 9, 8, 7, 6, 5, 4$.

Assim, vemos que a quantidade total de deslocamentos em cada sentido são exatamente iguais. A diferença está na ordem das translações.

Note que este exemplo tem nove dígitos, os quais representam os deslocamentos distintos da sequência proposta. Esses nove deslocamentos multiplicados pelas quatro rotações necessárias para retornar o mesmo sentido inicial vão nos fornecer o total de 36 translações para a figura voltar ao seu ponto original.

Vamos propor o seguinte teorema:

Teorema

Se a quantidade de deslocamentos da sequência original não for múltipla de quatro, *então* sempre teremos uma figura fechada.

Considere com os alunos o teorema anterior e façam algumas verificações.

Curiosidade

A *demonstração do Teorema* pode ser feita com os seguintes argumentos. Vamos chamar de SOn4 a sequência original que tem a quantidade de deslocamentos não múltipla de quatro.

Sabemos que um número natural não múltiplo de quatro ao ser dividido por quatro deixa resto não nulo que pode ser 1, 2 ou 3.

Sabemos também que uma quantidade de rotações de 90° multiplas de quatro em um plano retorna o sentido original do deslocamento.

Não vai ser o caso da SOn4, isto é, ao final da SOn4 o sentido do deslocamento não é o original. Ao repetir a SOn4 a partir deste ponto, teremos outro sentido e assim sucessivamente até que a quantidade de repetições vezes o resto da divisão por quatro seja um múltiplo de quatro. Resta mostrar que, neste ponto, o deslocamento efetivo é nulo. Aí a figura se fecha.

Agora vejamos o caso do experimento que não fechou $(1, 2, 3, 4)$. Vemos que na direção esquerda-direita, há uma sobra: $3 - 1 = 2$. Igualmente na direção cima-baixo a diferença não é nula: $4 - 2 = 2$. A repetição da sequência vai fazer estas sobras aumentarem. Por isso a figura se desloca indefinitivamente para esquerda e para cima.

Vamos ver um caso de oito translações iniciais $(1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1)$. Mas este caso está clara a ida e a volta. O deslocamento total é nulo e basta uma sequência.

Em outra sequência de oito translações inicias $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ teremos os seguintes saldos, em uma direção e outra:

$$1 - 3 + 5 - 7 = -4$$

$$2 - 4 + 6 - 8 = -4$$

E neste caso a figura teria um deslocamento efetivo indefinido para direita e pra baixo, pois ao final de oito rotações voltamos ao sentido inicial, mas temos saldo de deslocamentos que tende a se acumular e não se cancelar.

Assim, podemos ver que, dependendo dos saldos efetivos, os movimentos que tenham como quantidade de sequências iniciais múltiplos de quatro devem ter cancelamento nas direções perpendiculares para que a figura seja fechada. Caso contrário, o padrão obtido no plano quadriculado é de uma figura aberta sem fim.

Curiosidade

Considere todos os nós e vértices das figuras fechadas. Os vértices são as quinas das figuras de onde saem duas arestas. Os nós são os cruzamentos das translações, de onde saem quatro arestas, no nosso caso. Conte quantos nós e vértices, e registre-os na variável V, conte também quantas arestas e registre-as na variável A. Os padrões fechados que obtemos têm algumas regiões, inclusive o dentro e fora. Conte quantas regiões as figuras fechadas têm e registre na variável R.

Teorema

Com as definições anteriores temos que

$$V + R = A + 2$$

Esse teorema, que não demonstramos aqui, segue da famosa fórmula de Euler para grafos planos. Um teorema muito similar aparece no estudo dos sólidos convexos.

Proposta de fechamento

Como apresentado no experimento, promova a troca e a discussão dos padrões que cada grupo inventou. Mostre as simetrias, as alternâncias, os cruzamentos, os nós, os vértices e as regiões formadas. Tudo obtido a partir de regras de translação e rotação.

O professor pode representar o deslocamento através das propriedades de vetores decompostos no plano cartesiano. Assim, por exemplo, os primeiros passos da sequência (1, 2, 3) pode ser escrita como a seguinte soma:

$$V = (1, 0) + (0, -2) + (-3, 0)$$

Podemos somar os vetores individuais nas direções perpendiculares e obter $V = (-2, -2)$. Assim, tendo tempo suficiente, os alunos podem voltar aos seus desenhos e introduzir setas para indicar os sentidos das translações e, a cada final da sequência original, desenhar o segmento orientado que representa o vetor.

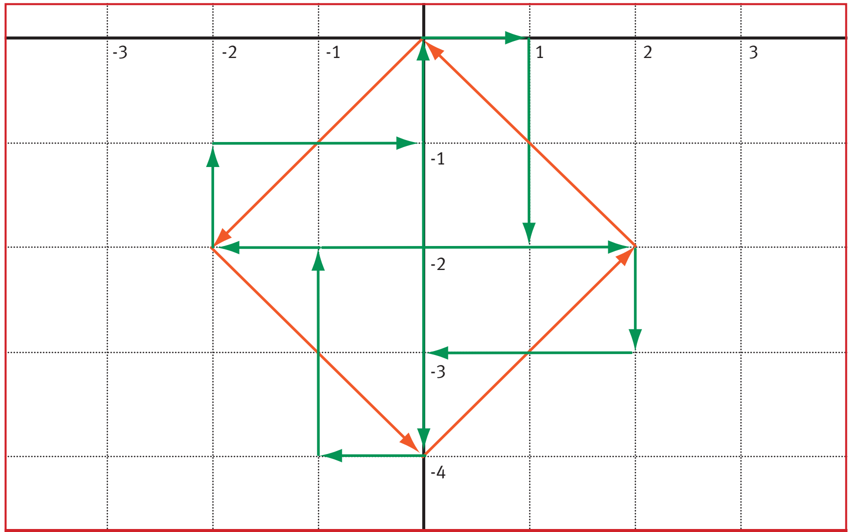


FIG. 7 *Sequência (1, 2, 3) com representações vetoriais*

A representação vetorial dos deslocamento pode ser feita em todos os desenhos, nos passos intermediários. Note que os vetores de deslocamento efetivo de cada sequência, em azul, formam um quadrado. Isto vai acontecer em todas as figuras fechadas?

Variações

No experimento, usamos as rotações de 90° para facilitar o desenho, especialmente no papel quadriculado. Contudo, se tivermos outro valor da rotação que divida os 360° em um número inteiro, podemos obter padrões interessantes também. Por exemplo, se as rotações forem de 60°, a sequência (1), gera um triângulo equilátero de lado 1. A sequência (1, 2) gera um polígono fechado, não regular, de seis lados. A sequência (1, 2, 3), também. Já a sequência (1, 2, 3, 4) gera a figura abaixo:

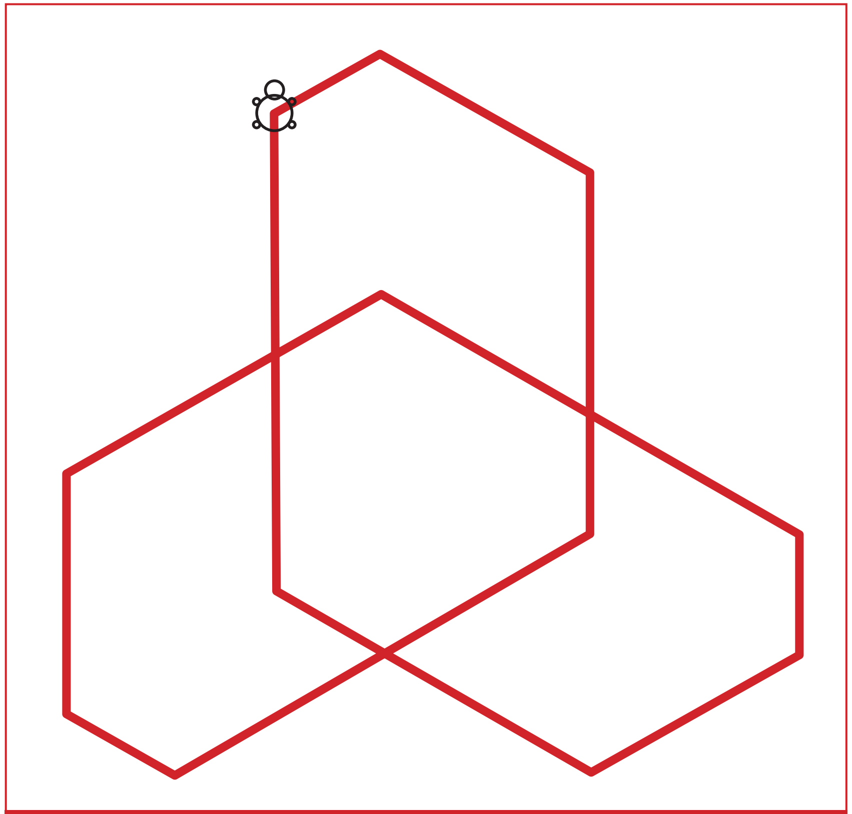


FIG. 8 *Padrão da sequência (1, 2, 3, 4) com rotações de 60°*

Agora, precisamos de seis rotações de 60° para voltar ao sentido inicial. E, de maneira similar ao desenvolvido no experimento, podemos propor o seguinte teorema: todas as sequências que não são múltiplas de seis geram figuras fechadas.

Notem também que a relação de Euler vale. No exemplo da FIGURA 8 com rotações de 60°, temos:

- 12 vértices e 3 nós. $V = 15$.
- 18 arestas. $A = 18$.
- 5 regiões. $R = 5$.

Portanto:

$$V + R = A + 2$$

Os padrões com rotações que não sejam de 90° são mais facilmente obtidos com a ajuda do computador usando, por exemplo, o SuperLogo 3.0. O padrão obtido acima usou o seguinte comando:

repita 3 [pd 60 pf 50 pd 60 pf 100 pd 60 pf 150 pd 60 pf 200].

Bibliografia

Boaventura Netto, P.. **Teoria e Modelos de Grafo**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, pg 143, 1979.

Barbosa, R. M. **Descobrindo padrões em mosaicos**. São Paulo: Editora Atual, 1993.

Imenes, L. M, Lellis, M. **Geometria dos Mosaicos**. São Paulo: Editora Scipione, 2002.

Hardy, G. H. **Apologia de um Matemático**. Lisboa: Editora Gradiva, 2007.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autor
Samuel Rocha de Oliveira

Revisores
Matemática
Antônio Carlos Patrocínio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Avaliadores
Pedagogia
Celi Aparecida Espasandin Lopes

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
José Tadeu Jorge
Vice-Reitor
Fernando Ferreira da Costa

Grupo Gestor de Projetos Educacionais (ggpe – unicamp)
Coordenador
Fernando Arantes
Gerente Executiva
Miriam C. C. de Oliveira

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (imecc – unicamp)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL