Matemática Multimídia

NÚMEROS E FUNÇÕES

GEOMETRIA E MEDIDAS

GUIA DO PROFESSOR

Software

Janelas em arco ferradura

Objetivos da unidade

1. Despertar a percepção da variação de valores da função de uma variável;
2. Modelar matematicamente uma situação por meio de uma função, determinando restrições de seu domínio;
3. Investigar o comportamento de uma função polinomial do segundo grau – seus valores máximos e mínimos.

REQUISITOS DE SOFTWARE Navegador moderno (Internet Explorer 7.0+ ou Firefox 3.0+), Adobe Flash Player 9.0+ e máquina Java 1.5+.

RESTRIÇÕES DE ACESSIBILIDADE Este software não possui recurso nativo de alto contraste nem possibilita navegação plena por teclado.

UNICAMP

FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Janelas em arco ferradura

Matemática Multimídia

Guia do professor

Sinopse

Este software ilustra um processo de otimização, utilizando polinômios do segundo grau. Considerada uma situação hipotética, o objetivo é encontrar, dentre as janelas com um determinado formato e de perímetro fixo, aquela que tem a maior área. O formato aqui proposto para ser investigado é o de janelas com base retangular e topo em forma de arco ferradura. A área dessas janelas pode ser estabelecida como uma função que é um polinômio do segundo grau com domínio restrito. O caminho de investigação proposto parte da percepção visual dos valores através de gráficos dinâmicos e induz ao "modelamento" do problema por funções.

Conteúdos

- Funções: Função quadrática;
- Geometria: perímetro, área de figuras planas.

Objetivos

1. Despertar a percepção da variação de valores da função de uma variável;
2. Modelar matematicamente uma situação por meio de uma função, determinando restrições de seu domínio;
3. Investigar o comportamento de uma função polinomial do segundo grau – seus valores máximos e mínimos.

Duração

Uma aula dupla.

Recomendação de uso

Sugerimos que o software seja utilizado em duplas.

Material relacionado

- Experimentos: Qual é o prisma de maior volume?, Polígonos e Círculos;
- Vídeo: A Lenda de Dido;
- Softwares: Otimização de Janelas, Otimização de Janelas com Topo Triangular e Janelas em Arco Romano.

Introdução

No dia a dia, é muito comum encontrar problemas que exigem otimização. Por exemplo, numa fábrica estamos sempre interessados em minimizar o tempo de produção e maximizar o lucro. Do ponto de vista da matemática, a otimização equivale em geral a procurar valores máximos e mínimos de uma função. Neste software, você terá a oportunidade de realizar atividades que ilustram um processo de otimização, utilizando polinômios do segundo grau. No caso de uma janela, uma maior iluminação está vinculada a uma maior área. Nos problemas aqui propostos vamos considerar uma situação hipotética na qual, a partir da medida do contorno fixo, procuramos qual é a janela que tem a maior área.

Problemas dessa natureza são denominados isoperimétricos e sempre estiveram presentes na história da matemática.

Outros três softwares, Otimização de Janelas e Otimização de Janelas com Topo Triangular e Janelas em Arco Romano, tratam de problemas semelhantes aos desenvolvidos neste.

O software

Estrutura do software

O software Janelas em Arco Ferradura é composto por uma atividade e um desafio.

TELA 1 *Mapa do software.*

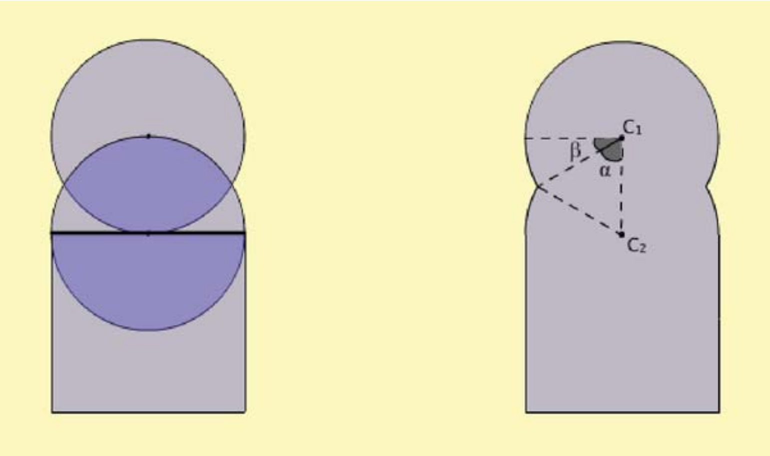
ATIVIDADE

1 Arco ferradura

O problema aqui apresentado é o de otimização para janelas com topo em arco ferradura.

Esta atividade é dividida em quatro partes, além de uma PARTE C final com comentários sobre as dimensões das janelas ótimas encontradas na ATIVIDADE 1.

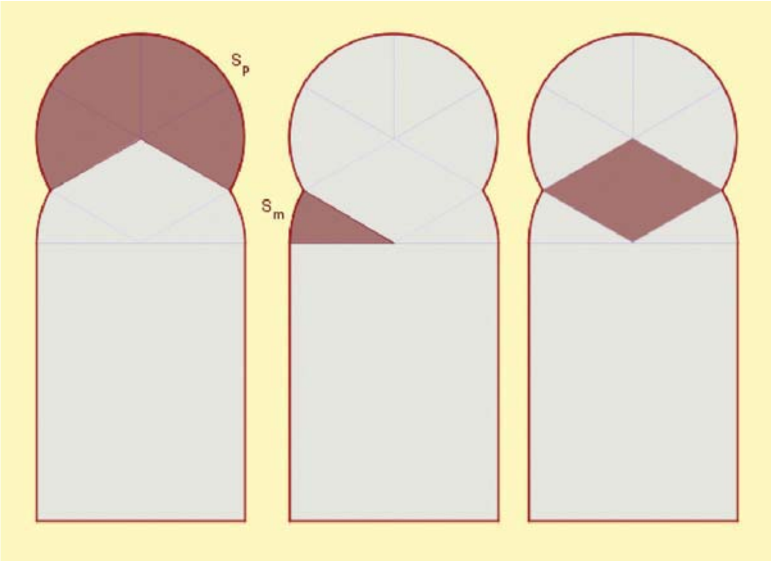
Na PARTE 1 é apresentada uma animação que ilustra a construção geométrica de um arco ferradura e são solicitados ângulos envolvidos nessa construção.



TELA 2

As questões da PARTE 2 dirigem o aluno, passo a passo, para a descrição do perímetro da janela em função da medida da base e da altura do retângulo. Solicita-se também, a partir do valor fixo do perímetro, 400 cm, que se determine a expressão da altura do retângulo em função da base, a qual será utilizada na PARTE 3.

As questões da PARTE 3 partem da decomposição da figura da janela em elementos geométricos mais simples (setores circulares, triângulos e retângulos) para induzir o aluno à descrição da área da janela como uma função quadrática em termos da medida da base do retângulo. Sugerimos que o professor solicite ao aluno que anote no caderno a expressão obtida para a área, com o objetivo de analisá-la em sala numa aula posterior (ver a seção FECHAMENTO deste guia).



TELA 3

Na PARTE 4 o aluno é convidado inicialmente a visualizar o gráfico da função para a área que obteve na parte 3 e observar a restrição do domínio dessa função. É solicitado então (Questões 6A e 6B) a determinar por inspeção o valor aproximado da área máxima e a medida da base que determina esse valor máximo. Sugerimos que o professor solicite ao aluno que anote no caderno a medida da base que proporciona a maior área e o valor dessa área, de modo que estes possam ser analisados em sala numa aula posterior (ver a seção FECHAMENTO deste guia). Na Questão 7A é solicitado o valor numérico aproximado da altura total da janela ótima.

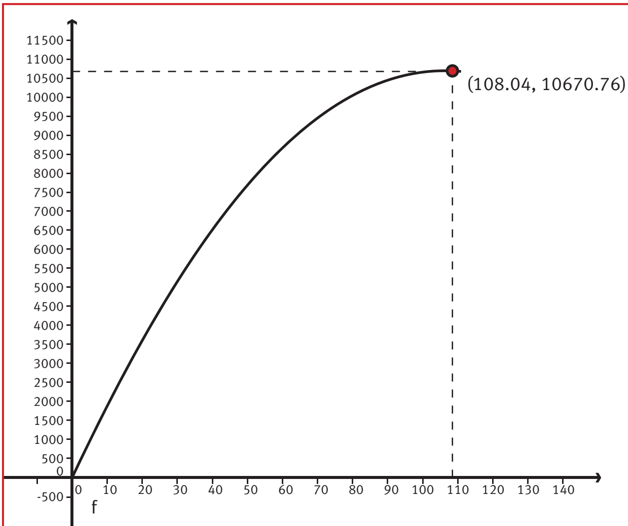
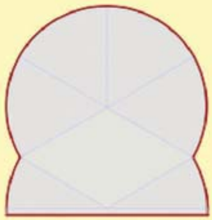


FIG. 1

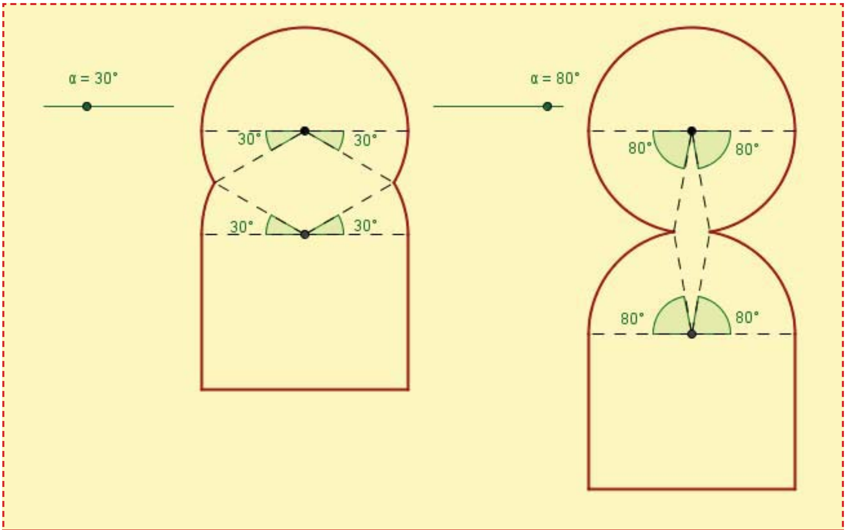
A parte C apresenta comentários sobre as proporções "estranhas" da janela ótima obtida, os quais oferecem uma motivação para a atividade do desafio, que aborda outras janelas em arco ferradura.



TELA 4 *Janela arco ferradura com perímetro igual a 400 cm e área máxima.*

Desafio

No DESAFIO o aluno é convidado a considerar outras janelas em arco ferradura, variando o ângulo de abrangência dos arcos. Nas janelas consideradas na ATIVIDADE 1 os arcos eram fixos em 30º. A partir da escolha dos ângulos (aqui está ilustrado um ângulo de 80º), o aluno deverá, seguindo passos análogos aos da ATIVIDADE 1, determinar na QUESTÃO 1 do caderno as dimensões da janela de área máxima.



TELA 5

Na QUESTÃO 2 o aluno é solicitado a escolher um ângulo complementar ao escolhido na QUESTÃO 1, repetir o procedimento e comparar os resultados.

Naturalmente, para resolver as questões do desafio será necessário, como abordagem geral, maximizar funções quadráticas, como é proposto no FECHAMENTO.

Fechamento

Recomendamos que o fechamento seja feito, por exemplo, na aula seguinte ao uso deste software.

Atividade 1

É importante relacionar o trabalho dos alunos na ATIVIDADE 1 com o conteúdo usual sobre funções quadráticas abordado até o ensino médio. Naturalmente o resultado fundamental aqui é o que estabelece o valor máximo de uma função quadrática e a associação deste ao vértice da parábola que descreve o gráfico da função.

Valor máximo de uma função quadrática

O valor máximo de uma função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais fixos, $a < 0$ e x variando nos reais, é $c - (b^2/4a)$, o qual é assumido para x igual $-b/2a$.

Como é conhecido, esse resultado pode ser justificado a partir da seguinte igualdade: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(b + b/2a)^2 + b \quad (b^2/4a)$.

Como a é negativo, essa última expressão assume seu valor máximo quando $(x + b/2a)^2$ se anula, ou seja, quando $x = -b/2a$.

No gráfico da função acima, que é uma parábola voltada para baixo, o ponto $V = \left(-b/2a, c \quad (b^2/4a)\right)$ é o vértice.

Nossa sugestão para o fechamento da ATIVIDADE 1 é que cada aluno, partindo da expressão para a área obtida na PARTE 3 da atividade, encontre o valor máximo utilizando o resultado acima e o compare com o valor aproximado obtido visualmente na PARTE 4.

Se o professor preferir, poderá trabalhar em sala com a expressão exata para a área da janela em arco ferradura da ATIVIDADE 1:

$$A(x) = \left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{4} \quad 5\frac{\pi}{24} \quad \frac{1}{2} \right) x^2 + 200x\,.$$

Desafio

A seguir vamos comentar as questões do desafio sugeridas para serem respondidas no caderno.

Desafio – Questão para o caderno: 1A

Escolha o valor que desejar para o ângulo que determina os arcos menores e, com base nesse valor, calcule as medidas da janela com área máxima e perímetro igual a 400 cm.

Desafio – Questão para o caderno: 2A

Faça o mesmo para a janela gerada a partir do ângulo complementar ao que você escolheu na questão anterior. Há alguma relação entre as medidas dessas duas janelas?

Para resolver estas questões serão necessárias a abordagem geral acima referida, a maximização de funções quadráticas, e a dedução da expressão para a área a partir da decomposição da figura da janela em partes mais simples.

A expressão para a área da janela em arco ferradura, quando um ângulo arbitrário α dado em graus é escolhido, pode ser obtida somando-se as áreas:

- **i.** do semicírculo;
- **ii.** de quatro setores circulares do ângulo α;
- **iii.** de dois triângulos que têm por base $2\cos(90-\alpha)\frac{x}{2}$ e por altura $\operatorname{sen}(90-\alpha)\frac{x}{2}$;
- **iv.** do retângulo de base x e altura h, onde

$$2h = 400 - \pi\left(\frac{x}{2}\right) - 4\left(\frac{\alpha}{90}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right) - x$$

Agrupando os termos e usando relações trigonométricas obtemos que a área da janela para um ângulo α é dada em função da medida x da base por:

$$A_\alpha(x) = \left(\pi\left(\frac{1}{8} \quad \frac{\alpha}{360}\right) + \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4} \quad \frac{1}{2}\right)x^2 + 200x$$

Pelo resultado visto sobre valores máximos de funções quadráticas, podem ser encontrados então, para o ângulo α escolhido, os valores para a área máxima da janela e a medida da base que a determina.

Observe que, se na expressão $A_\alpha(x)$ substituirmos α por 30°, obtemos a expressão anterior $A(x)$ que descreve a área das janelas consideradas na ATIVIDADE 1.

Bibliografia

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**, Vol 1. Coleção do Professor de Matemática. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autoras
Sueli I. R. Costa e
Claudina Izepe Rodrigues

Revisores
Língua Portuguesa
Ana Cecília Agua de Melo

Projeto gráfico e ilustrações técnicas
Preface Design

foto dos arcos
Austinevan

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira Costa
Vice-Reitor
Edgar Salvadori de Decca
Pró-Reitor de Pós-Graduação
Euclides de Mesquita Neto

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Software
Leonardo Barichello
Coordenador de Implementação
Matias Costa

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (imecc – unicamp)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal